



8.10.2019

Самостоятельная работа N 1

«Простейшие уравнения в частных производных».

**Пример варианта:**

Найдите общее решение уравнений:

1)  $xu_{xy} - u_y = x + y,$

2)  $(1 - x^2)u_x - u_y = 2x.$

### Занятие № 6

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Гл. 2, § 5, с. 75: № 33 (1)

### Общая схема преобразования уравнения

$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$		
Тип уравнения		
$B^2 - AC > 0$	$B^2 - AC = 0$	$B^2 - AC < 0$
гиперболический	параболический	эллиптический
Уравнение характеристик		
$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0$		
Первые интегралы уравнения характеристик (семейства характеристик)		
$\varphi(x, y) = C_1,$ $\psi(x, y) = C_2$	$\varphi(x, y) = C$	$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1,$ $\varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2$

Замена		
$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$	$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad J \neq 0$	$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$
$u(x, y) = v(\xi, \eta),$ $u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x,$ $u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y,$ $u_{xx} = v_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx},$ $u_{yy} = v_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy},$ $u_{xy} = v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy}$		
Канонический вид		
$v_{\xi\eta} = \Phi$	$v_{\eta\eta} = \Phi$	$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Phi$
где $\Phi = \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$		



### Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 68-75: разбор примеров.  
с. 75, № 33(3).

15.10.2019

### Занятие № 7

**Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.**

Гл. 2, § 5, с. 76: № 33 (2), 34 (1), 35 (1), 36 (1)

**№ 34 (1).** Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 2 \sin x \cdot u_{xy} + (2 - \cos^2 x) \cdot u_{yy} = 0.$$

- 1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости (нет таких  $x$  и  $y$ , при которых коэффициенты при вторых производных одновременно бы обращались в 0).
- 2) Определение типа уравнения:

$d = \sin^2 x - (2 - \cos^2 x) = -1 \Rightarrow$  уравнение имеет эллиптический тип в любой точке плоскости.

3) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} (dy)^2 + 2 \sin x \cdot dydx + (2 - \cos^2 x)(dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (dy + \sin x \cdot dx)^2 + (dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (dy + \sin x dx + idx)(dy + \sin x dx - idx) &= 0. \end{aligned}$$

Два комплексно-сопряженных первых интеграла:

$$y - \cos x + ix = C_1, \quad y - \cos x - ix = C_2.$$

4) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - \cos x, \quad \eta = x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(y - \cos x, x).$$

5) Выражение производных функции  $u$  через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = \sin x \cdot v_\xi + v_\eta \\ 0 & u_y = v_\xi \\ 1 & u_{xx} = \sin^2 x \cdot v_{\xi\xi} + 2 \sin x \cdot v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + \cos x \cdot v_\xi \\ 2 - \cos^2 x & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\ -2 \sin x & u_{xy} = \sin x \cdot v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} \end{array}$$

6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x + 2 - \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 1$	
$v_{\eta\eta}$	1	
$v_{\xi\eta}$	$2 \sin x - 2 \sin x = 0$	
$v_\xi$	$\cos x$	$\cos \eta$
$v_\eta$	0	

Канонический вид:  $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \cos \eta \cdot v_\xi = 0.$

**№ 35 (1).** Области параболжности, гиперболичности и эллиптичности уравнения:  $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1 + y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0$ .

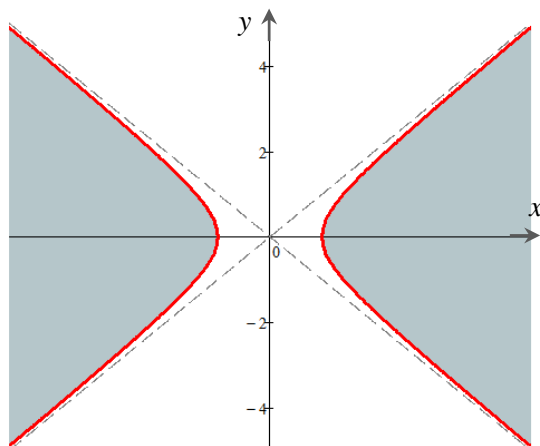
Дискриминант уравнения:

$$d = (xy)^2 + (1 - x^2)(1 + y^2) = 1 - x^2 + y^2.$$

Области, где сохраняются тип уравнения, описывают условия:

Область параболжности	Область гиперболичности	Область эллиптичности
$1 - x^2 + y^2 = 0$	$1 - x^2 + y^2 > 0$	$1 - x^2 + y^2 < 0$

Уравнение  $1 - x^2 + y^2 = 0$  на координатной плоскости  $Oxy$  определяет **гиперболу**, которая является границей областей



Между ветвями  
гиперболы



**Домашнее задание**

Гл. 2, §5 с. 75-76: № 34 (2), 35 (3)

22.10.2019

## Занятие № 8

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения.

**№ 36 (1).** Привести уравнение к каноническому виду

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0.$$

Определение типа уравнения:

$$d = x^2 - x \cdot (x-1) = x$$

<b>Области</b>		
параболичности	гиперболичности	эллиптичности
$x = 0$	$x > 0$	$x < 0$

### Область параболичности

При  $x = 0$  уравнение принимает вид:  $u_{yy} = 0$  (канонический)

Уравнение характеристик:

$$x(dy)^2 - 2xdxdy + (x-1)(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow x(dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0.$$

$x > 0$	$x < 0$
$(\sqrt{x})^2 (dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0.$	$(\sqrt{-x})^2 (dy-dx)^2 + (dx)^2 = 0.$

### Область гиперболичности

$$(\sqrt{x})^2 (dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dy - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 0, \\ dy - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 0 \end{cases}$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2\sqrt{x} = c_1,$$

$$y - x - 2\sqrt{x} = c_2$$

Замена

$$\begin{cases} \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \\ \eta = y - x - 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$u(x, y) = v(y - x + 2\sqrt{x}, y - x - 2\sqrt{x})$$

Выражение производных функции  $u$  через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l}
 0 & u_x = v_\xi \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_\eta \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
 0 & u_y = v_\xi + v_\eta \\
 x & u_{xx} = v_{\xi\xi} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2v_{\xi\eta} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \\
 & \quad + v_{\eta\eta} \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - v_\xi \frac{1}{2x\sqrt{x}} + v_\eta \frac{1}{2x\sqrt{x}} \\
 x-1 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
 2x & u_{xy} = v_{\xi\xi} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_{\xi\eta} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_{\eta\eta} \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)
 \end{array}$$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$x \cdot \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x - 1 + 2x \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$	
$v_{\eta\eta}$	$x \cdot \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x - 1 + 2x \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$	
$v_{\xi\eta}$	$2x \left(1 - \frac{1}{x}\right) + 2(x - 1) - 4x = -4$	
$v_\xi$	$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{2}{\xi - \eta}$
$v_\eta$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{\xi - \eta}$

Канонический вид:  $v_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}(v_\xi - v_\eta) = 0$ .

**Область эллиптичности**

$$(\sqrt{-x})^2 (dy - dx)^2 + (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dy - \left(1 + \frac{i}{\sqrt{-x}}\right) dx = 0, \\ dy - \left(1 - \frac{i}{\sqrt{-x}}\right) dx = 0 \end{cases}$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2i\sqrt{-x} = c_1,$$

$$y - x - 2i\sqrt{-x} = c_2$$

Замена

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = 2\sqrt{-x} \end{cases}$$

$$u(x, y) = v(y - x, 2\sqrt{-x})$$

Выражение производных функции  $u$  через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = -v_\xi - v_\eta \frac{1}{\sqrt{-x}} \\ 0 & u_y = v_\xi \\ x & u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} \frac{1}{\sqrt{-x}} - v_{\eta\eta} \frac{1}{x} + v_\eta \frac{1}{2x\sqrt{-x}} \\ x-1 & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\ 2x & u_{xy} = -v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} \frac{1}{\sqrt{-x}} \end{array}$$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$x + x - 1 - 2x = -1$	
$v_{\eta\eta}$	$-1$	
$v_{\xi\eta}$	$2x \frac{1}{\sqrt{-x}} - 2x \frac{1}{\sqrt{-x}} = 0$	
$v_\xi$	$0$	
$v_\eta$	$\frac{1}{2\sqrt{-x}}$	$\frac{1}{\eta}$

Канонический вид:  $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} v_\eta = 0$ .

**Задание 1.** Постройте общее решение уравнения

$$xu_{xx} - 4x^2u_{xy} + 4x^3u_{yy} + u_x - 4xu_y - x(y + x^2) = 0. \quad (1)$$

- 1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости за исключением точек прямой  $x = 0$ .
- 2) Определение типа уравнения:

$$d = 4x^4 - 4x^4 = 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет параболический тип.}$$

- 3) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} x(dy)^2 + 4x^2 dy dx + 4x^3 (dx)^2 = 0 &\Leftrightarrow (dy + 2x dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dy + 2x dx = 0 \Rightarrow y + x^2 = C. \end{aligned}$$

- 4) Переход к новым переменным:

$$\xi = y + x^2, \quad \eta = x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(y + x^2, x).$$

- 5) Выражение производных функции  $u$  через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 1 & u_x = 2xv_{\xi} + v_{\eta} \\ -4x & u_y = v_{\xi} \\ x & u_{xx} = 4x^2 v_{\xi\xi} + 4xv_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + 2v_{\xi} \\ 4x^3 & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\ -4x^2 & u_{xy} = 2xv_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} \end{array}$$

- 6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\xi}$	$v_{\eta}$	Свободное слагаемое
0	$x$	0	0	1	$-x(y + x^2)$
	$\eta$			1	$-\xi\eta$
	$\eta \neq 0$				

Канонический вид:

$$\eta v_{\eta\eta} + v_{\eta} = \xi \eta \quad (2)$$

- 7) Построение общего решения уравнения (2):



$$\eta v_{\eta\eta} + v_{\eta} = \xi\eta \Leftrightarrow (\eta v_{\eta})'_{\eta} = \xi\eta,$$

$$\eta v_{\eta} = \frac{\xi\eta^2}{2} + C(\xi), \quad v_{\eta} = \frac{\xi\eta}{2} + \frac{C(\xi)}{\eta},$$

$$v(\xi, \eta) = \frac{\xi\eta^2}{4} + C(\xi)\ln|\eta| + \Phi(\xi).$$

8) Возвращаясь к старым переменным  $x, y, u$ , получим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \frac{x^2(y+x^2)}{4} + C(y+x^2)\ln|x| + \Phi(y+x^2) \quad (3)$$

**Замечание.** Так как переменная  $\eta$  может быть задана любым выражением, при котором преобразование независимых переменных будет невырожденным, то и канонический вид может быть другим. Так, если новые переменные ввести следующим образом:

$$\xi = y + x^2, \quad \eta = y, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta),$$

то канонический вид для уравнения (1) будет следующим:

$$(\xi - \eta)v_{\eta\eta} - v_{\eta} = \frac{\xi}{4}.$$

Его решение:

$$(\xi - \eta)v_{\eta\eta} - v_{\eta} = \frac{\xi}{4} \Leftrightarrow ((\xi - \eta)v_{\eta})'_{\eta} = \frac{\xi}{4}, \quad (\xi - \eta)v_{\eta} = \frac{\xi\eta}{4} + C(\xi),$$

$$v_{\eta} = \frac{\xi\eta}{4(\xi - \eta)} + \frac{C(\xi)}{\xi - \eta}, \quad v = -C(\xi)\ln|\eta - \xi| - \frac{\xi}{4}(\eta + \xi \ln|\eta - \xi|) + \Phi(\xi).$$

Обозначив  $\Psi(\xi) = -C(\xi) - \frac{\xi^2}{4}$ , получим решение уравнения (2)

$$v(\xi, \eta) = \Psi(\xi)\ln|\eta - \xi| - \frac{\xi\eta}{4} + \Phi(\xi).$$

Возвращаясь к старым переменным  $x, y, u$ , получим общее решение уравнения (1) в следующем виде:

$$u(x, y) = \Psi(y + x^2)\ln x^2 - \frac{y(y+x^2)}{4} + \Phi(y + x^2),$$

Можно показать, что полученное выражение равносильно (3), полагая:

$$\Psi(y + x^2) = \frac{1}{2}C(y + x^2) + \frac{(y+x^2)^2}{4}.$$

□



## Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 76: № 36 (4).

**29.10.2019**

### Занятие № 9

**Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.**

**№ 40 (2).** Найти решение уравнения

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям:  $u(x,0) = 2x$ ,  $u_y(x,0) = 1$ .

1) Определение типа уравнения:

$$d = 4 + 5 = 9 > 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет гиперболический тип.}$$

2) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} (dy)^2 - 4dydx - 5(dx)^2 = 0 &\Leftrightarrow (dy - 2dx)^2 - 9(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} dy - 5dx = 0, \\ dy + dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 5x = C_1, \\ y + x = C_2. \end{cases} \end{aligned}$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - 5x, \quad \eta = y + x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(y - 5x, y + x).$$

4) Выражение производных функции  $u$  через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 1 & u_x = -5v_\xi + v_\eta \\ -1 & u_y = v_\xi + v_\eta \\ 1 & u_{xx} = 25v_{\xi\xi} - 10v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ -5 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ 4 & u_{xy} = -5v_{\xi\xi} - 4v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\xi}$	$v_{\eta}$
0	0	-36	-6	0

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{6} v_{\xi} = 0. \quad (2)$$

6) Построение общего решения уравнения (2):

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{6} v_{\xi} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_{\xi} = w, \\ w_{\eta} + \frac{1}{6} w = 0. \end{cases}$$

$$w_{\eta} + \frac{1}{6} w = 0, \quad w(\xi, \eta) = C(\xi) e^{-\frac{1}{6}\eta},$$

$$v_{\xi} = C(\xi) e^{-\frac{1}{6}\eta}, \quad v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) e^{-\frac{1}{6}\eta} + F(\eta).$$

7) Возвращаясь к старым переменным  $x, y, u$ , получим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \Phi(y - 5x) e^{-\frac{1}{6}(y+x)} + F(y + x). \quad (3)$$

8) Построение частного решения

Найдем производную:

$$u_y(x, y) = \Phi'(y - 5x) e^{-\frac{1}{6}(y+x)} - \frac{1}{6} \Phi(y - 5x) e^{-\frac{1}{6}(y+x)} + F'(y + x).$$

Подставляя (3) в заданные условия  $u(x, 0) = 2x$ ,  $u_y(x, 0) = 1$ , получим систему для нахождения функций  $F$  и  $\Phi$ :

$$\begin{cases} u(x, 0) = \Phi(-5x) e^{-\frac{1}{6}x} + F(x) = 2x, \\ u_y(x, 0) = \Phi'(-5x) e^{-\frac{1}{6}x} - \frac{1}{6} \Phi(-5x) e^{-\frac{1}{6}x} + F'(x) = 1. \end{cases}$$

*Решение системы (методом подстановки)*

$$\begin{cases} F(x) = 2x - \Phi(-5x) e^{-\frac{1}{6}x}, \\ \Phi'(-5x) e^{-\frac{1}{6}x} - \frac{1}{6} \Phi(-5x) e^{-\frac{1}{6}x} + 2 + 5\Phi'(-5x) e^{-\frac{1}{6}x} + \frac{1}{6} \Phi(-5x) e^{-\frac{1}{6}x} = 1 \end{cases}$$

$$6\Phi'(-5x)e^{-\frac{x}{6}} = -1, \quad \Phi'(-5x) = -\frac{1}{6}e^{\frac{x}{6}}, \quad \Phi'(t) = -\frac{1}{6}e^{-\frac{t}{30}},$$

$$\Phi(t) = 5e^{-\frac{t}{30}} + C, \quad C - \text{const.}$$

Подставляя полученное выражение для  $\Phi$  в первое уравнение системы, найдем

$$F(x) = 2x - 5 - C.$$

Найденные выражения для функций  $F$  и  $\Phi$  подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$u(x, y) = 2(y + x) - 5 + 5e^{-\frac{1}{5}y}.$$

#### № 40 (3). Найти решение уравнения

$$(\sin^2 y - 4)u_{xx} - 2\sin y \cdot u_{xy} + u_{yy} - \cos y \cdot u_x = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям:  $u(\cos y, y) = \cos y$ ,  $u_x(\cos y, y) = \sin y$ .

1) Определение типа уравнения:

$$d = \sin^2 y - (\sin^2 y - 4) = 4 > 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет гиперболический тип.}$$

2) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} (\sin^2 y - 4)(dy)^2 + 2\sin y dy dx + (dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (dx + \sin y dy)^2 - 4(dy)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} dx + (\sin y - 2)dy = 0, \\ dx + (\sin y + 2)dy = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \cos y - 2y = C_1, \\ x - \cos y + 2y = C_2. \end{cases} \end{aligned}$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = x - \cos y - 2y, \quad \eta = x - \cos y + 2y, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(x - \cos y - 2y, x - \cos y + 2y).$$

4) Выражение производных функции  $u$  через новые переменные:

$$-\cos y \mid u_x = v_\xi + v_\eta$$

$$\begin{array}{l|l}
 0 & u_y = (\sin y - 2)v_\xi + (\sin y + 2)v_\eta \\
 (\sin^2 y - 4) & u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
 1 & u_{yy} = (\sin y - 2)^2 v_{\xi\xi} + 2(\sin^2 y - 4)v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)^2 v_{\eta\eta} + \\
 & \quad + \cos y \cdot v_\xi + \cos y \cdot v_\eta \\
 -2\sin y & u_{xy} = (\sin y - 2)v_{\xi\xi} + 2\sin y \cdot v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)v_{\eta\eta}
 \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y - 2)^2 - 2\sin y(\sin y - 2) = 0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y + 2)^2 - 2\sin y(\sin y + 2) = 0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 y - 4) + 2(\sin^2 y - 4) - 4\sin^2 y = -16$
$v_\xi$	$-\cos y + \cos y = 0$
$v_\eta$	$-\cos y + \cos y = 0$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0$$

6) Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta). \quad (2)$$

7) Возвращаясь к старым переменным  $x, y, u$ , получим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \Phi(x - \cos y - 2y) + \Psi(x - \cos y + 2y). \quad (3)$$

8) Построение частного решения

Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(\cos y, y) = \cos y, \quad u_x(\cos y, y) = \sin y,$$

получим систему для нахождения функций  $F$  и  $\Phi$ :

$$\begin{cases}
 u(\cos y, y) = \Phi(-2y) + F(2y) = \cos y, \\
 u_x(\cos y, y) = \Phi'(-2y) + F'(2y) = \sin y.
 \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы (методом подстановки)

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$-2\Phi'(-2y) + 2F'(2y) = -\sin y \Rightarrow \Phi'(-2y) = \frac{1}{2}\sin y + F'(2y).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$\frac{1}{2}\sin y + F'(2y) + F'(2y) = \sin y \Rightarrow F'(2y) = \frac{1}{4}\sin y,$$

$$F'(t) = \frac{1}{4}\sin \frac{t}{2}, \quad F(t) = -\frac{1}{2}\cos \frac{t}{2} + C, \quad C - const.$$

Найденное выражение для функции  $F$  подставляем в первое уравнение системы (4):

$$\Phi(-2y) - \frac{1}{2}\cos y + C = \cos y \Rightarrow \Phi(-2y) = \frac{3}{2}\cos y - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \frac{3}{2}\cos \frac{t}{2} - C.$$

Найденные выражения для функций  $F$  и  $\Phi$  подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$u(x, y) = \frac{3}{2}\cos \frac{x - \cos y - 2y}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{x - \cos y + 2y}{2}.$$



### Домашнее задание

Гл. 2, § 7, с. 86: № 40 (1, 5а)

Подготовка к контрольной работе. Выполните следующие задания:

1. Укажите области на плоскости  $XOY$ , где сохраняется тип уравнения:

$$y u_{xx} - x(\cos \pi x + 1)u_{yy} + x u_x - u = 0$$

2. Решите задачу Коши:

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (4 - \sin^2 x)u_{yy} + 8u_x - (16 + 8\sin x + \cos x)u_y = 0,$$

$$u(x, \cos x) = e^{-6x} + 2x, \quad u_y(x, \cos x) = 1 - e^{-6x}.$$

