Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

3.09.2019

Занятие № 1. Простейшие уравнения в частных производных. Общее решение

Гл. 2, § 2, с. 55: №№ 4, 6, 7 (1,3).

№ 7 (1): $xu_{xy} + u_y = 0$

1 способ

Если $x \neq 0$:

$$xu_{xy} + u_y = 0, \quad (xu_y)'_x = 0, \quad xu_y = C(y),$$

$$u_y = \frac{C(y)}{x}, \quad u(x,y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x},$$

где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

2 способ (понижение порядка уравнения с помощью замены).

1) При $x \neq 0$ имеем

$$xu_{xy} + u_y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_y, \\ xv_x + v = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

2) Построим общее решение уравнения

$$xv_x + v = 0 \qquad (2)$$

методом разделения переменных, рассматривая уравнение (2) как «обыкновенное дифференциальное уравнение», в котором переменную y считаем параметром):

$$\frac{\partial v}{v} = -\frac{\partial x}{x}, \qquad \ln|v| = -\ln|x| + \ln|C_1(y)|, \quad v(x,y) = \frac{C_1(y)}{x}.$$

3) Подставив найденное для v выражение в 1-е уравнение системы (1), получим уравнение:

$$u_y = \frac{C_1(y)}{x},$$

интегрируя которое по y, найдем

$$u(x,y) = \frac{C_2(y)}{x} + C_3(x).$$

где $C_2(y)$ и $C_3(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Ответ: $\boxed{u(x,y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x}.}$

№ 7 (3): $u_{xy} + 5u_x = xy^2$

Этапы решения:

1) $u_{xy} + 5u_x = xy^2 \iff \begin{cases} v = u_x, \\ v_y + 5v = xy^2. \end{cases}$

2) Построение общего решения уравнения $v_y + 5v = xy^2$ (*):

А) построение общего решения соответствующего однородного уравнения $v_y + 5v = 0$: $v(x,y) = e^{-5y}C(x)$, где $C(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{част}(x,y) = A(x)y^2 + B(x)y + D(x).$$

5	$v_{част}(x,y) = A(x)y^2 + B(x)y + D(x)$

1	$\left(v_{част}\right)'_y = 2yA(x) + B(x)$

<table>
<tr><td>$y^2:$</td><td>$5A(x) = x,$</td><td rowspan="3">$\Rightarrow \begin{cases} A(x) = x/5, \\ B(x) = -2x/25, \\ D(x) = 2x/125. \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$y:$</td><td>$5B(x) + 2A(x) = 0,$</td></tr>
<tr><td>$y^0:$</td><td>$5D(x) + B(x) = 0.$</td></tr>
</table>

Результат: $v_{част}(x, y) = \dfrac{x}{5}\left(y^2 - \dfrac{2}{5}y + \dfrac{2}{25}\right).$

В) общее решение:

$$v(x, y) = e^{-5y}C(x) + \frac{x}{5}\left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25}\right).$$

Замечание. Общее решение уравнения (*) может быть построено методом вариации:

Решение неоднородного уравнения (*) будем искать в виде

$$v(x, y) = C(x, y)e^{-5y}. \qquad (1)$$

Подставляя (1) в (*), получим

$$C'_y\,(x, y)e^{-5y} - 5C(x, y)e^{-5y} + 5C(x, y)e^{-5y} = xy^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C'_y\,(x, y) = xy^2 e^{5y}.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$C(x, y) = \frac{x}{125}e^{5y}(25y^2 - 10y + 2) + \tilde{C}(x). \qquad (2)$$

$$\int x \cdot y^2 \cdot e^{5y}\,dy \text{ simplify } \rightarrow \frac{x \cdot e^{5 \cdot y} \cdot \left(25 \cdot y^2 - 10 \cdot y + 2\right)}{125}$$

Подставляя (2) в (1), получим общее решение уравнения (*):

$$v(x,y)=\frac{x}{125}(25y^2-10y+2)+\tilde{C}(x)e^{-5y}.$$

3) Построение общего решения уравнения $u_x=v(x,y)$:

$u(x,y)=e^{-5y}C_1(x)+\dfrac{x^2}{10}\left(y^2-\dfrac{2}{5}y+\dfrac{2}{25}\right)+C_2(y)$, где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Ответ: $\boxed{u(x,y)=e^{-5y}C_1(x)+\dfrac{x^2}{10}\left(y^2-\dfrac{2}{5}y+\dfrac{2}{25}\right)+C_2(y).}$

Домашнее задание

С. 48 § 2 (разбор примеров).

С. 54-55: №№ 5, 6 (вычисление интегралов), № 7 (2).

Повторить: *решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом вариации*.

10.09.2019

Занятие № 2. Простейшие уравнения в частных производных. Общее решение

с. 55, **№ 7 (5):** $u_{xy}+\frac{1}{6}u_x=0$

$$\begin{cases} u_x=v, \\ v_y+\frac{1}{6}v=0 \end{cases}$$

$$v(x,y)=C(x)e^{-\frac{1}{6}y},\quad u_x=C(x)e^{-\frac{1}{6}y},\quad u(x,y)=e^{-\frac{1}{6}y}\int C(x)dx+C_1(y),$$

$u(x,y)=e^{-\frac{1}{6}y}C_2(x)+C_1(y)$, где $C_1(y)$ и $C_2(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

с. 55, **№ 7 (7):** $u_{yy}+\frac{1}{y}u_y=0$

Так как $y\neq 0$, то

$$u_{yy}+\frac{1}{y}u_y=0,\quad yu_{yy}+u_y=0,\quad (yu_y)'_y=0,\quad yu_y=C_1(x),\quad u_y=\frac{C_1(x)}{y},$$

$u(x,y)=C_1(x)\ln|y|+C_2(x)$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Построить общее решение уравнения: $u_{xy}+5xu_x=x+y$.

Этапы решения:

1) $u_{xy}+5xu_x=x+y \Leftrightarrow \begin{cases} v=u_x, \\ v_y+5xv=x+y. \end{cases}$

2) Построение общего решения уравнения $v_y+5xv=x+y$ (*):

А) построение общего решения соответствующего однородного уравнения $v_y+5xv=0$: $v(x,y)=e^{-5yx}C(x)$, где $C(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{част}(x,y)=A(x)y+B(x).$$

Результат: $v_{част}(x,y)=\frac{y}{5x}+\frac{1}{5}-\frac{1}{25x^2},\quad x\neq 0.$

В) общее решение:

$$v(x,y)=e^{-5yx}C(x)+\frac{y}{5x}+\frac{1}{5}-\frac{1}{25x^2},\quad x\neq 0.$$

3) Построение общего решения уравнения $u_x=v(x,y)$:

$$u(x,y)=\int C(x)e^{-5xy}dx+\frac{y\ln|x|}{5}+\frac{x}{5}+\frac{1}{25x}+C_1(y),\quad x\neq 0,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Замечание. Если x = 0, то для уравнения (*) имеем:

$$v_y(0,y) = y \quad \Rightarrow \quad v(0,y) = \frac{y^2}{2} + C,\ C -$$ произвольная константа.

Возвращаясь к замене, получим уравнение:

$$u_x(0,y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Из него решение заданного уравнения при $x = 0$ путем интегрирования по x нельзя.

с. 55, **№ 8 (1):** $u_x + \alpha(y)u = f(x,y),\ \ u = u(x,y).$ (1)

1) Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$u_x + \alpha(y)u = 0. \tag{2}$$

Так уравнение является линейным и его коэффициенты не зависят от x, то построив характеристическое уравнение

$$\lambda + \alpha(y) = 0, \qquad \lambda = -\alpha(y),$$

найдем общее решение уравнения (2):

$$u(x,y) = C(y)e^{-\alpha(y)x},$$

где $C(y)$ – произвольная дифференцируемая функция.

2) Общее решение неоднородного уравнения (1) можно построить методом вариации. Будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$u(x,y) = C(x,y)e^{-\alpha(y)x}, \tag{3}$$

Подставив (3) в (1), получим

$$C'_x(x,y)e^{-\alpha(y)x} - \alpha(y)C(x,y)e^{-\alpha(y)x} + \alpha(y)C(x,y)e^{-\alpha(y)x} = f(x,y),$$

$$C'_x(x,y) = e^{\alpha(y)x} f(x,y).$$

Интегрируя последнее уравнение по переменной x, найдем

$$C(x,y) = \int_0^x e^{\alpha(y)\xi} f(\xi,y)d\xi + A(y), \tag{4}$$

где $A(y)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Подставляя (4) в (3), получим искомое решение:

$$u(x,y)=e^{-\alpha(y)x}\int_0^x e^{\alpha(y)\xi} f(\xi,y)d\xi + A(y)e^{-\alpha(y)x}.$$

с. 55, **№ 9:** Найти решение уравнения $u_{xx}=f(x,y)$, удовлетворяющее условиям $u(0,y)=\sin y$, $u(y,y)=y$.

Построим общее решение заданного уравнения:

$$u_{xx}=f(x,y) \;\to\; u_x=\int_0^x f(\xi,y)d\xi + C_1(y) \;\to$$

$$\to\; u(x,y)=\int_0^x\int_0^z f(\xi,y)d\xi dz + C_1(y)x + C_2(y). \qquad (*)$$

Здесь $C_1(y)$, $C_2(y)$ – произвольные функции, которые необходимо определить, используя заданные условия. Подчинив построенное общее решение (*) заданным условиям, будем иметь:

$$u(0,y)=C_2(y)=\sin y,$$

$$u(y,y)=\int_0^y\int_0^z f(\xi,y)d\xi dz + C_1(y)y + C_2(y)=y.$$

Отсюда найдем:

$$C_2(y)=\sin y,\quad C_1(y)=\frac{1}{y}\left(y-\sin y-\int_0^y\int_0^z f(\xi,y)d\xi dz\right).$$

Домашнее задание

С. 55: №№ 7 (4,6,8), 8 (2),

Решите уравнение: $u_{xy}+xyu_x=y$, $u=u(x,y)$.

Лекция: Уравнения в частных производных 1-го порядка. Метод характеристик.