



Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

19.04.2019

Занятие № 10. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Метод Фурье

$$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (1)$$

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u(a, y) = \nu(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (3)$$

$$\mu(0) = \mu(b) = \nu(0) = \nu(b) = 0.$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа (1) в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = \text{const.}$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (5)$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \quad (6)$$

Подставив (4) в граничные условия (3), получим условия

$$Y(0) = Y(b) = 0, \quad (7)$$

которые вместе с уравнением (6) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \quad Y_k(y) = \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad \|Y_k(y)\|^2 = \frac{b}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для каждого значения параметра $c = c_k$ общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$X(x) = A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}}.$$

В результате получаем решение уравнения (1) в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (6), (7):

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} \right) \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (8)$$

Произвольные постоянные A_k и B_k найдем, подчинив ряд (8) граничным условиям (2):

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \sin \frac{k\pi y}{b} = \mu(y),$$

$$u(a, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} \right) \sin \frac{k\pi y}{b} = \nu(y).$$

Разложив функции $\mu(y)$ и $\nu(y)$ в ряд по собственным $Y_k(y)$, получим:

$$\begin{cases} A_k + B_k = \frac{2}{b} \int_0^b \mu(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \mu_k, \\ A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} = \frac{2}{b} \int_0^b \nu(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \nu_k, \end{cases} \quad (9)$$

$k = 1, 2, \dots$

Система (9) имеет следующее решение:

$$A_k = \frac{\nu_k - \mu_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}, \quad B_k = \frac{\mu_k e^{\frac{k\pi a}{b}} - \nu_k}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставив полученные выражения для A_k и B_k в ряд (8), получим

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} + \mu_k \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \sin \frac{k\pi y}{b}.$$

С. 154, № 48

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать решение краевой задачи (1) в виде суммы:

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y), \quad (2)$$

когда функции $v(x, y)$ и $w(x, y)$ являются соответственно решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ v(0, y) = v(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ v(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad v(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a, \\ w(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad w(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b. \end{cases} \quad (4)$$

Решение краевой задачи (3) можно найти в виде ряда по собственным функциям $X_k(x)$ (граничные условия однородные для $x = 0$ и $x = a$):

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (5)$$

Подставив (5) в уравнение Лапласа и граничные условия задачи (3) при $y = 0$ и $y = b$, получим следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, & 0 < y < b, \quad k \in N, \\ Y_k(0) = \begin{cases} B, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1, \end{cases} \quad Y_k(b) = 0, \quad k \in N. \end{cases} \quad (6)$$

решив которые, найдем $Y_k(y)$:

$$Y_1(y) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}}, \quad Y_k(y) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

Таким образом, для задачи (3) получаем следующее решение

$$v(x, y) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Сравнивая условия задач (3) и (4), нетрудно установить, что решение задачи (4) имеет вид:

$$w(x, y) = A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Ответ:

$$u(x, y) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b}.$$



Домашнее задание

С.110, № 13 (1), с.154, № 55.

26.04.2019

Занятие № 11. Краевые задачи для уравнения Лапласа

С. 155, № 56 (1) (Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге)

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \varphi) = 0, & 0 < r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа в круге имеет вид:

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\pi\varphi + B_k \sin k\pi\varphi) r^k.$$

С. 156, № 59 (4) (условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге)

Задача Неймана для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \varphi) = 0, & 0 < r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u_r(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Условие разрешимости: $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$.

Общее решение уравнения Лапласа в круге:

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n$$

С. 157, № 63 (Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце)

Перейдя к полярным координатам $u(x, y) \rightarrow v(r, \varphi)$, получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = 0, & 2 < r < 3, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v(2, \varphi) = 2 \cos \varphi, & v(3, \varphi) = 3 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (1)$$

1 способ. Общее решение уравнения Лапласа в кольце:

$$v(r, \varphi) =$$

$$= A_0 \ln r + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos k\varphi + (B_k r^k + B_{-k} r^{-k}) \sin k\varphi.$$

Подчинив общее решение заданным граничным условиям:

$$v(2, \varphi) = 2 \cos \varphi =$$

$$= A_0 \ln 2 + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 2^k + A_{-k} 2^{-k}) \cos k\varphi + (B_k 2^k + B_{-k} 2^{-k}) \sin k\varphi,$$

$$v(3, \varphi) = 3 \sin \varphi =$$

$$= A_0 \ln 3 + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 3^k + A_{-k} 3^{-k}) \cos k\varphi + (B_k 3^k + B_{-k} 3^{-k}) \sin k\varphi,$$

Построим системы уравнений для нахождения коэффициентов $A_0, B_0, A_k, A_{-k}, B_k, B_{-k}$:

$$1) \begin{cases} A_0 \ln a + B_0 = 0 \\ A_0 \ln b + B_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 0, \\ B_0 = 0, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2A_1 + A_{-1}2^{-1} = 2, \\ 3A_1 + A_{-1}3^{-1} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{4}{5}, \\ A_{-1} = \frac{36}{5}, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2B_1 + B_{-1}2^{-1} = 0, \\ 3B_1 + B_{-1}3^{-1} = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{9}{5}, \\ B_{-1} = -\frac{36}{5}, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} A_k 2^k + A_{-k} 2^{-k} = 0, \\ A_k 3^k + A_{-k} 3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k = 0, \\ A_{-k} = 0, \end{cases} \text{ для } k=2, 3, \dots$$

$$5) \begin{cases} B_k 2^k + B_{-k} 2^{-k} = 0, \\ B_k 3^k + B_{-k} 3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_k = 0, \\ B_{-k} = 0, \end{cases} \text{ для } k=2, 3, \dots$$

Таким образом,

$$v(r, \varphi) = \left(-\frac{4}{5}r + \frac{36}{5}\frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \left(\frac{9}{5}r - \frac{36}{5}\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим

$$u(x, y) = \frac{9}{5}y - \frac{4}{5}x + \frac{36}{5} \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

2 способ (метод частных решений). Решение краевой задачи (1) будем искать в виде:

$$v(r, \varphi) = R_1(r) \cos \varphi + R_2(r) \sin \varphi. \quad (2)$$

Подставив (2) в уравнение и граничные условия задачи (1), получим:

$$(r^2 R_1'' + r R_1' - R_1) \cos \varphi + (r^2 R_2'' + r R_2' - R_2) \sin \varphi = 0,$$

$$R_1(2) \cos \varphi + R_2(2) \sin \varphi = 2 \cos \varphi, \quad R_1(3) \cos \varphi + R_2(2) \sin \varphi = 3 \sin \varphi.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ в правых и левых частях каждого из полученных равенств, получим две краевые задачи для нахождения функций $R_1(r)$ и $R_2(r)$:

$$1) \quad r^2 R_1'' + r R_1' - R_1 = 0, \quad R_1(2) = 2, \quad R_1(3) = 0;$$

$$2) \quad r^2 R_2'' + r R_2' - R_2 = 0, \quad R_2(2) = 0, \quad R_2(3) = 3.$$



Домашнее задание

Решите краевые задачи 1) и 2).

С.155, № 56 (7), 59 (5).

17.05.2019

Занятие № 12. Краевые задачи для уравнения Пуассона

С. 156, № 58 (4)

Перейдя к полярным координатам $u(x, y) \rightarrow v(r, \varphi)$, получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = r \sin \varphi, & 0 < r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v(R, \varphi) = 1, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье с коэффициентами, которые являются функциями r :

$$v(r, \varphi) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi) \quad (1)$$

Подстановка ряда (1) в уравнение краевой задачи дает:

$$A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) \right) \cos k\varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) \right) \sin k\varphi = r \cdot \sin \varphi.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$, получим:

$$A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) = 0,$$

$$A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) = 0, \quad \forall k,$$

$$B_1''(r) + \frac{1}{r} B_1'(r) - \frac{1}{r^2} B_1(r) = r,$$

$$B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

Подстановка ряда (1) в граничное условие краевой задачи дает:

$$A_0(R) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(R) \cos k\varphi + B_k(R) \sin k\varphi) \cos k\varphi = 1.$$

Отсюда получаем:

$$A_0(R) = 1, \quad A_k(R) = B_k(R) = 0 \quad \forall k \neq 0.$$

В результате получили следующие краевые задачи:

$$1) \quad A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad A_0(R) = 1,$$

$$2) \quad A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad A_k(R) = 0, \quad \forall k \neq 0,$$

$$3) \quad B_1''(r) + \frac{1}{r} B_1'(r) - \frac{1}{r^2} B_1(r) = r, \quad 0 < r < R, \quad B_1(R) = 0,$$

$$4) \quad B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad B_k(R) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

При построении решения краевых задач 1)-4) следует учитывать условие ограниченности решения при $r = 0$.

Решение задачи 1): $A_0(r) \equiv 1$.

Уравнение задачи 3) является неоднородным уравнением Эйлера¹:

$$r^2 B_1''(r) + r B_1'(r) - B_1(r) = r^3. \quad (2)$$

Общее решение соответствующего однородного имеет вид:

$$B_1^{одн}(r) = C_1 r + C_2 r^{-1}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде:

$$B_1^ч(r) = D \cdot r^3.$$

Подставляя выражение для $B_1^ч(r)$ в уравнение (2), найдем $D = 1/8$.

Таким образом, общим решением уравнения (2) является функция:

$$B_1(r) = C_1 r + C_2 r^{-1} + \frac{1}{8} r^3.$$

Из условия ограниченности решения задачи 3) имеем $C_2 = 0$. Учитывая условие $B_1(R) = 0$, найдем $C_1 = -\frac{1}{8} R^2$. Таким образом, получили решение задачи 3):

$$B_1(r) = -\frac{1}{8} R^2 r + \frac{1}{8} r^3.$$

Решения задачи 1)-4) подставляем в ряд (1):

$$v(r, \varphi) = 1 + \left(-\frac{1}{8} R^2 r + \frac{1}{8} r^3\right) \sin \varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x, y) = 1 + \frac{1}{8} (y(x^2 + y^2) - R^2 y).$$

С. 157, № 64

1. Переходя к полярным координатам, получим:

¹ О решении уравнения Эйлера см., например, стр. 74 в «Дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие. Часть 1.» (сост. М.М. Кручек, Н.Ю. Светова, Е.Е. Семенова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014)

<http://elibrary.karelia.ru/book.shtml?levelID=017&id=20620&cType=1>

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = r \sin \varphi, & 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v(1, \varphi) = v_r(2, \varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (1)$$

2. Решение краевой задачи ищется в виде ряда Фурье:

$$v(r, \varphi) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi) \quad (2)$$

3. Подстановка (2) в (1) дает следующие краевые задачи:

$$1) \quad rA_0''(r) + A_0'(r) = 0, \quad 1 < r < 2, \quad A_0(1) = A_0'(2) = 0,$$

$$2) \quad r^2 A_2''(r) + rA_2'(r) - 4A_2(r) = r^3, \quad 1 < r < 2, \quad A_2(1) = A_2'(2) = 0,$$

3)

$$r^2 A_k''(r) + rA_k'(r) - k^2 A_k(r) = 0, \quad 1 < r < 2,$$

$$A_k(1) = A_k'(2) = 0, \quad \forall k \neq 0, 2,$$

4)

$$r^2 B_k''(r) + rB_k'(r) - k^2 B_k(r) = 0, \quad 1 < r < 2,$$

$$B_k(1) = B_k'(2) = 0, \quad \forall k.$$

Ненулевое решение имеет только задача 2):

$$A_2(r) = \frac{1}{85} (17r^3 - 49r^2 + 32r^{-2}).$$

Тогда

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{85} (17r^3 - 49r^2 + 32r^{-2}) \cos 2\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x, y) = \frac{1}{85} (x^2 - y^2) \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{32}{(x^2 + y^2)^2} - 49 \right).$$



Домашнее задание

С. 156, № 58(3), № 66.

Подготовка к контрольной работе (31 мая 2019 г.)

Примерный вариант

1. Найдите гармоническую функцию $u(x, y)$ в круге радиуса $R = 3$, удовлетворяющую на границе области условию Дирихле:

$$u(x, y)|_{x^2+y^2=9} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + 3.$$

2. При каких значениях параметров A и B краевая задача

$$\Delta u(r, \phi) = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = x^2 - Ay^2 + B, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

имеет решение?

3. В области $0 < x < 1$, $t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_t = 9u_{xx} - 18t + x^2 + x + 5 \cos 5\pi x,$$

$$u_x(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = 3t,$$

$$u(x, 0) = 2 + \cos 3\pi x.$$

4. Найдите решение $u = u(r, \varphi)$ уравнения Лапласа в кольце $1 \leq r \leq 2$, удовлетворяющее на его границе следующим условиям:

$$u(1, \varphi) = \sin 2\varphi, \quad u_r(2, \varphi) = 1.$$