Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

22.03.2019

Занятие № 6. Краевые задачи для уравнения теплопроводности на прямой. Интеграл Пуассона

Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой:

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad |x| < +\infty, \end{aligned} \tag{1}$$

имеет решение, представимое с помощью **интеграла Пуассона**:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau, \tag{2}$$

где функция

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \tag{3}$$

является **фундаментальным решением** уравнения теплопроводности на прямой (функция Грина).

Задача 1

Построить решение краевой задачи для уравнения теплопроводности на прямой (задача Коши):

$$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx} + 8u_x + 3u + e^{-x}(1 + te^{-t}), \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = 2e^{-x}, \quad |x| < +\infty. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ответ: $u(x,t) = 1 + e^t + \frac{t^2}{2}$.

Задача 2

Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + e^{-t}, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \cos x, \quad |x| < +\infty. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Ответ: $u(x,t) = 1 - e^{-t} + e^{-t}\cos x.$

Зачастую вычисления, связанные с интегралом Пуассона, являются громоздкими. Для широкого класса функций $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ можно применить **метод частных решений**. Для этого заметим, что оператор теплопроводности $Lu = u_t - a^2 u_{xx}$ переводит (отображает), например, функции вида $g(t)\sin\lambda x$ и $g(t)\cos\lambda x$ в функции того же вида $h(t)\sin\lambda x$ и $h(t)\cos\lambda x$ соответственно.

Разобъем задачу (2.1) на две:

1) $$\begin{aligned} &v_t = v_{xx} + e^{-t}, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &v(x,0) = 0, \quad |x| < +\infty, \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} &w_t = w_{xx}, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &w(x,0) = \cos x, \quad |x| < +\infty. \end{aligned}$$

Решение первой задачи найдем с помощью формулы (2):

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}.$$

Решение второй задачи будем искать в виде $w(x,t) = g(t)\cos x$, где функция $g(t)$ подлежит определению. Подставляя это выражение в уравнение и начальное условие задачи 2), будем иметь

$$g'(t)\cos x = -g(t)\cos x, \qquad g(0)\cos x = \cos x.$$

Отсюда получаем задачу Коши

$$\begin{cases} g'(t) = -g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решением является функция $g(t) = e^{-t}$. Следовательно, $w(x,t) = e^{-t}\cos x.$ Суммируя решения задач 1) и 2), получим решение задачи (2.1):

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = 1 - e^{-t} + e^{-t}\cos x.$$

Задача 3

Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx} + \sin t \cdot \cos x, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \cos x + \sin x, \quad |x| < +\infty. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Решение можно построить, разбив задачу (3.1) на две:

1) $$\begin{aligned} &v_t = 4v_{xx} + \sin t \cdot \cos x, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &w(x,0) = \cos x, \quad |x| < +\infty. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} &w_t = 4w_{xx}, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &w(x,0) = \sin x, \quad |x| < +\infty. \end{aligned}$$

Обе задачи можно решить, применив метод частных решений. Решение первой задачи ищем в виде $v(x,t) = g(t)\cos x$, а второй – $w(x,t) = h(t)\sin x.$. При этом функции $g(t)$ и $h(t)$ являются решениями задач Коши

$$\begin{cases} g'(t) = -4g(t) + \sin t, \\ g(0) = 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} h'(t) = -4h(t), \\ h(0) = 1. \end{cases}$$

соответственно.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{1}{17}(e^{-4t}-\cos t+4\sin t)\cos x+e^{-4t}\sin x.$

Домашнее задание

Глава V. §6: стр. 174, № 72 (2).

29.03.2019

Занятие № 7. Краевые задачи для уравнения теплопроводности на прямой. Интеграл Пуассона

С. 174, § 6, № 72 (2). Решить задачу Коши:

$$u_t=u_{xx}+\sin t,\qquad |x|<+\infty,\quad t>0,$$

$$u(x,0)=e^{-x^2},\quad |x|<+\infty.$$

Решение задачи дается формулой (2) при $a=1$:

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}G(x,\xi,t)d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin\tau G(x,\xi,t-\tau)d\xi d\tau, \tag{72.1}$$

где $G(x,\xi,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$. Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)d\xi=1,$ то

для второго интеграла будем иметь:

$$\int\limits_{0}^{t}\sin\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)d\xi d\tau=\int\limits_{0}^{t}\sin\tau d\tau=1-\cos t.$$

Вычислим первый интеграл в (72.1). Так как

$$\frac{(x-\xi)^2}{4t}+\xi^2=\left[\sqrt{\frac{1+4t}{4t}}\xi-\frac{x}{\sqrt{4t(1+4t)}}\right]^2+\frac{x^2}{1+4t},$$

то получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} G(x,\xi,t)d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\left[\sqrt{\frac{1+4t}{4t}}\xi-\frac{x}{\sqrt{4t(1+4t)}}\right]^2\right\}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}+1-\cos t.$$

Задача 4

Пусть функция $\Phi(x)$ определена и непрерывна на прямой, является нечетной относительно точки x = 0 и $2l$-периодична. Докажите, что функция

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi,\quad где\quad G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

удовлетворяет условию $u(0,t)=u(l,t)=0.$

Доказательство. Так как функция $G(0,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}$ является четной относительно точки ξ=0, то произведение $\Phi(\xi)G(0,\xi,t)$ - функция нечетная относительно точки ξ=0. Тогда

$$u(0,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)G(0,\xi,t)d\xi=0$$

как интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке.
Для $u(l,t)$ x = l справедливы следующие преобразования:

$$u(l,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)G(l,\xi,t)d\xi=\begin{bmatrix}\textit{Замена}\\ \eta=\xi-l\end{bmatrix}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\eta+l)G(l,\eta+l,t)d\eta=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta=\int_{-\infty}^{0}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta+\int_{0}^{+\infty}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\Phi(-\eta+l)G(0,-\eta,t)d\eta+\int_{0}^{+\infty}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta=$$

Так как $\Phi(-\eta+l)=-\Phi(\eta-l),\quad G(0,-\eta,t)=G(0,\eta,t),$ то

$$=-\int_{0}^{+\infty}\Phi(\eta-l)G(0,\eta,t)d\eta+\int_{0}^{+\infty}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta=$$

Так как $\Phi(\eta-l)=\Phi(\eta-l+2l)=\Phi(\eta+l)$, то

$$=-\int_{0}^{+\infty}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta+\int_{0}^{+\infty}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta=0.$$

Домашнее задание

Глава V. §6: стр. 174, № 72 (3).

5.04.2019

Занятие № 8. Краевые задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой

Задача 1

Построить решение краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой:

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x>0, \;\; t>0,\\
&u(x,0)=0, \quad x\ge 0, \\
&au_x(0,t) - bu(0,t) = 0, \quad t\ge 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Этапы построения решения:

1. Показать, то решение задачи (1) определяется интегралом:

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)d\tau,$$

где функция $w(x,t,\tau)$ является решением краевой задачи:

$$
\begin{aligned}
&w_t = a^2 w_{xx}, \qquad x>0, \;\; t>\tau,\\
&w(x,\tau,\tau) = f(x,\tau), \quad x\ge 0,\\
&aw_x(0,t,\tau) - bw(0,t,\tau) = 0, \quad t\ge\tau.
\end{aligned}
$$

2. Показать, что решение задачи (1) определяется выражением:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_i(x,\xi,t-\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,$$

где $G_i(x,\xi,t)$ – функция Грина, соответствующая граничному условию i-го рода.

Задача 2

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \ \ t > 0, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = \mu(t), \ \ t \ge 0, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = 0, \ \ x \ge 0, \qquad (3)$$

Граничная функция $\mu(t)$ является непрерывной, ограниченной и

$$\mu(0) = 0. \qquad (4)$$

Будем искать решение (1)–(3) задачи в виде

$$u(x,t) = \mu(t) + w(x,t), \qquad (5)$$

где функция $w(x,t)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} - \mu'(t), \quad x > 0, \ \ t > 0, \\ w(0,t) = 0, \ \ t \ge 0, \\ w(x,0) = 0, \ \ x \ge 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Так как фундаментальным решением уравнения теплопроводности на полупрямой с граничным условием 1-го рода является функция:

$$G_1(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}},$$

то для решения задачи (6) имеем

$$w(x,t) = -\int_0^t \int_0^{+\infty} \mu'(\tau) G_1(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau = -\int_0^t \mu'(\tau) \int_0^{+\infty} G_1(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau. \qquad (7)$$

Преобразуем внутренний интеграл:

$$\int_0^{+\infty} G_1(x,\xi,t-\tau)d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Выполнив для 1-го интеграла замену $z = \dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$, а для второго – $z = \dfrac{x+\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$, получим

$$\int_0^{+\infty} G_1(x,\xi,t-\tau)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-x/2a\sqrt{t-\tau}}^{+\infty} e^{-z^2}dz - \int_{x/2a\sqrt{t-\tau}}^{+\infty} e^{-z^2}dz \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2a\sqrt{t-\tau}}^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2}dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2}dz.$$

Тогда

$$w(x,t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu'(\tau) \int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2} dz d\tau.$$

Применив правило интегрирования по частям, получим

$$w(x,t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu(\tau) \int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2}dz \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2}dz \right) d\tau \right) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu(t) \int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz - \frac{1}{4a}\int_0^t \frac{x\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right) d\tau \right) =$$

$$= -\mu(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right) d\tau.$$

Подставив построенное для $w(x,t)$ выражение в (5), получим решение задачи (1)-(3):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau. \qquad (8)$$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} u(x,t) = \mu(t)$.

В интеграле (8) выполним замену $z = \dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$.

Так как

$$dz = \frac{x}{4a\sqrt{(t-\tau)^3}} d\tau \quad \text{и} \quad \tau = t - \frac{x^2}{4a^2 z^2},$$

то будем иметь

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2a\sqrt{t}}^{+\infty} \mu\left(t - \frac{x^2}{4a^2 z^2}\right) \exp\left(-z^2\right) dz.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \mu(t) \exp\left(-z^2\right) dz. = \mu(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-z^2\right) dz. = \mu(t).$$

Домашнее задание

Построить решение краевой задачи:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \ t > 0,$$

$$u_x(0,t) = \mu(t), \ t \ge 0,$$

$$u(x,0) = 0, \ x \ge 0,$$

Граничная функция $\mu(t)$ является непрерывной и $\mu(0) = 0$.