Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

15.11.2018

Занятие № 11

I. Приведение уравнения к каноническому виду (случай n независимых переменных, $n>2$)

Гл. 2, § 6, с. 79: № 38 (3)

Привести уравнение к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения:

$$u_{yy}+u_{xy}+u_{zz}+u_x+u_y+u_z+u=0. \qquad (1)$$

1. Приведя соответствующую квадратичную форму к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_3^2=(\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2)^2-\frac{1}{4}\lambda_2^2+\lambda_3^2=\mu_1^2-\mu_2^2+\mu_3^2,$$

где $\begin{cases}\mu_1=\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2,\\ \mu_2=\frac{1}{2}\lambda_2,\\ \mu_3=\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\mu_1+\mu_2,\\ \lambda_2=2\mu_2,\\ \lambda_3=\mu_3,\end{cases}$ (2)

можно сделать вывод, что уравнение (1) имеет гиперболический тип (все три коэффициента квадратичной формы отличны от нуля, но не все одного знака).

II. Задача Коши для уравнения гиперболического типа. Формула Даламбера

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad |x|<+\infty,\quad t>0, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad |x|<+\infty. \qquad (2)$$

Решение задачи Коши (1)-(2) описывается формулой Даламбера:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3)$$

Гл. 5, § 2, с. 124: № 17 (в)

Свойство решений задачи Коши (1)-(2) ($f(x,t)\equiv 0$) :

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – нечетные и $2l$-периодические функции, то $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Используя формулу Даламбера (3), найдем:

1) $$u(0,t)=\frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{-\varphi(at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=0.$$

Замечание. Интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке равен 0.

2) $$u(l,t)=\frac{\varphi(l-at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

По свойствам нечетности и $2l$-периодичности функции φ получим:

$$\varphi(l-at)=-\varphi(-l+at)=-\varphi(-l+at+2l)=-\varphi(l+at)\,.$$

Разбив интеграл на два:

$$\int_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi=\int_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi+\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi,$$

Преобразуем первый интеграл, используя свойства нечетности и $2l$-периодичности функции ψ:

$$\int_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi=\left[\xi=-\eta\right]=-\int_{-l+at}^{-l}\psi(-\eta)d\xi=\int_{-l+at}^{-l}\psi(\eta)d\eta=\int_{-l+at}^{-l}\psi(\eta+2l)d\eta=$$

$$=\left[\xi=\eta+2l\right]=\int_{l+at}^{l}\psi(\xi)d\xi=-\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

Таим образом, получаем:

$$u(l,t)=\frac{-\varphi(l+at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(-\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi+\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi\right)=0.$$

Гл. 5, § 2, с. 123: № 13 (3)

$$u_{xx}-u_{tt}+5u_x+3u_t+4u=0,\quad |x|<+\infty,\quad t>0, \tag{4}$$

$$u(x,0)=xe^{-\frac{5}{2}x-x^2},\quad u_t(x,0)=e^{-\frac{5}{2}x},\quad |x|<+\infty. \tag{5}$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$u(x,t)=e^{\alpha x+\beta t}v(x,t),$$

определив коэффициенты так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало производных по переменным x и t.
Так как

4	$u(x,t)=e^{\alpha x+\beta t}v(x,t),$
5	$u_x=e^{\alpha x+\beta t}(\alpha v+v_x),$
3	$u_t=e^{\alpha x+\beta t}(\beta v+v_t),$
1	$u_{xx}=e^{\alpha x+\beta t}(\alpha^2 v+2\alpha v_x+v_{xx}),$
−1	$u_{tt}=e^{\alpha x+\beta t}(\beta^2 v+2\beta v_t+v_{tt}),$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

v	$e^{\alpha x+\beta t}(4+5\alpha+3\beta+\alpha^2-\beta^2)$
v_x	$e^{\alpha x+\beta t}(5+2\alpha)$
v_t	$e^{\alpha x+\beta t}(3-2\beta)$
v_{xx}	$e^{\alpha x+\beta t}$
v_{tt}	$-e^{\alpha x+\beta t}$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 5+2\alpha=0, \\ 3-2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-5/2, \\ \beta=3/2, \end{cases}$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt}=v_{xx}. \qquad (6)$$

А

$$u(x,t)=e^{(-5x+3t)/2}v(x,t), \qquad (7)$$

Подставляя выражение (7) в начальные условия (5), получим начальные условия для функции $v(x, t)$:

$$v(x,0)=xe^{-x^2}, \quad v_t(x,0)=e^{5x/2}\left(u_t(x,0)-\frac{3}{2}u(x,0)\right)=1-\frac{3}{2}xe^{-x^2}. \qquad (8)$$

Таким образом, с помощью преобразования (7) задача Коши (4), (5) приводится к виду (6), (8). Для построения решения задачи Коши (6), (8) используем формулу Даламбера. В результате получим:

$$v(x,t)=t+e^{-x^2-t^2}\left(x\operatorname{ch}2xt-\left(t+\frac{3}{4}\right)\operatorname{sh}2xt\right) \qquad (9)$$

Домашнее задание

С. 123-124: № 13 (3) – показать справедливость формулы (9), **№ 18.**

Проработать материал лекции «Задача Штурма-Лиувилля»

22.11.2018

Занятие № 12.

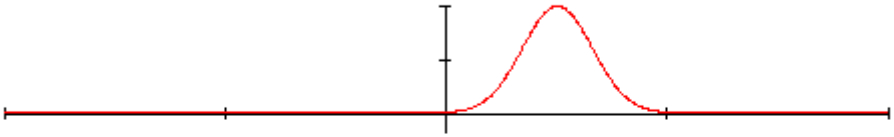
Задача Коши для волнового уравнения на прямой. Формула Даламбера.

Графическое построение решения в MathCAD.

$a := 2 \qquad \phi(x) := e^{\frac{-(x-10)^2}{20}} \qquad \psi(x) := 0$

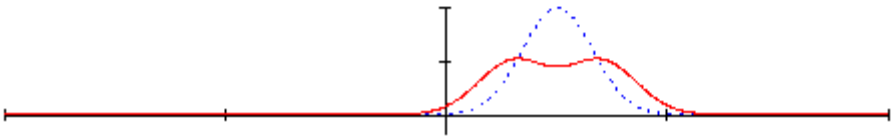
$$u(x,t) := \frac{\phi(x - a\cdot t) + \phi(x + a\cdot t)}{2} + \frac{1}{2\cdot a}\cdot\int_{x-a\cdot t}^{x+a\cdot t} \psi(z)\, dz$$

$t := 0$



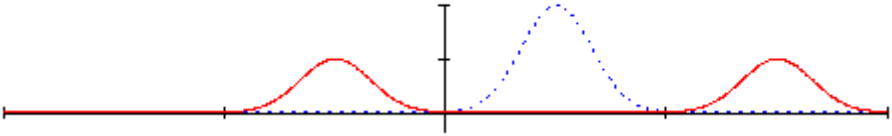
$t := 1$

$t := 2$



$t := 4$

$t := 10$



Анимация