Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

11.10.2018

Самостоятельная работа N 1
«Простейшие уравнения в частных производных».

Пример варианта:

Найдите общее решение уравнений:

1) $xu_{xy} - u_y = x + y,$

2) $(1 - x^2)u_x - u_y = 2x.$

Занятие № 6

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Гл. 2, § 5, с. 75: № 33 (1,2)

Общая схема преобразования уравнения

$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x.u_y)$		
Тип уравнения		
$B^2 - AC > 0$	$B^2 - AC = 0$	$B^2 - AC < 0$
гиперболический	параболический	эллиптический
Уравнение характеристик		
$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0$		
Первые интегралы уравнения характеристик (семейства характеристик)		

<table>
<tr><td>$\varphi(x,y)=C_1,$
$\psi(x,y)=C_2$</td><td>$\varphi(x,y)=C$</td><td>$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1,$
$\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Замена</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$</td><td>$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y),\end{cases}\quad J\neq 0$</td><td>$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$u(x,y)=v(\xi,\eta),$
$u_x=v_\xi\xi_x+v_\eta\eta_x,$
$u_y=v_\xi\xi_y+v_\eta\eta_y,$
$u_{xx}=v_{\xi\xi}(\xi_x)^2+2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+v_{\eta\eta}(\eta_x)^2+v_\xi\xi_{xx}+v_\eta\eta_{xx},$
$u_{yy}=v_{\xi\xi}(\xi_y)^2+2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+v_{\eta\eta}(\eta_y)^2+v_\xi\xi_{yy}+v_\eta\eta_{yy},$
$u_{xy}=v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+v_\xi\xi_{xy}+v_\eta\eta_{xy}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Канонический вид</td></tr>
<tr><td>$v_{\xi\eta}=\Phi$</td><td>$v_{\eta\eta}=\Phi$</td><td>$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=\Phi$</td></tr>
<tr><td colspan="3">где $\Phi=\Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta)$</td></tr>
</table>

Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 68-75: разбор примеров.

с. 75, № 33(3).

18.10.2018

Занятие № 7

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Гл. 2, § 5, с. 76: № 34 (1), 35 (1), 36 (1)

№ 34 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx}-2\sin x\cdot u_{xy}+(2-\cos^2 x)\cdot u_{yy}=0.$$

1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости (нет таких x и y, при которых коэффициенты при вторых производных одновременно бы обращались в 0).

2) Определение типа уравнения:

$d = \sin^2 x - (2 - \cos^2 x) = -1 \;\Rightarrow$ уравнение имеет эллиптический тип в любой точке плоскости.

3) Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2 + 2\sin x \cdot dydx + (2 - \cos^2 x)(dx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (dy + \sin x \cdot dx)^2 + (dx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (dy + \sin x dx + idx)(dy + \sin x dx - idx) = 0.$$

Два комплексно-сопряженных первых интеграла:

$$y - \cos x + ix = C_1, \quad y - \cos x - ix = C_2.$$

4) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - \cos x, \quad \eta = x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$
$$u(x, y) = v(y - \cos x, x).$$

5) Выражение производных функции u через новые переменные:

0	$u_x = \sin x \cdot v_\xi + v_\eta$
0	$u_y = v_\xi$
1	$u_{xx} = \sin^2 x \cdot v_{\xi\xi} + 2\sin x \cdot v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + \cos x \cdot v_\xi$
$2-\cos^2 x$	$u_{yy} = v_{\xi\xi}$
$-2\sin x$	$u_{xy} = \sin x \cdot v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}$

6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x + 2 - \cos^2 x - 2\sin^2 x = 1$	
$v_{\eta\eta}$	1	
$v_{\xi\eta}$	$2\sin x - 2\sin x = 0$	

v_ξ	$\cos x$	$\cos\eta$
v_η	0	

Канонический вид: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \cos\eta \cdot v_\xi = 0.$

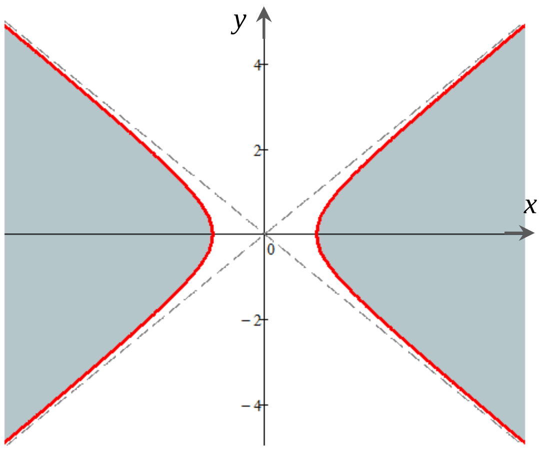
№ 35 (1). Области параболичности, гиперболичности и эллиптичности уравнения:

$$(1-x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1+y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0.$$

Дискриминант уравнения:

$$d = (xy)^2 + (1-x^2)(1+y^2) = 1 - x^2 + y^2.$$

Области, где сохранятся тип уравнения, описывают условия:

<table>
<tr><th>Область параболичности</th><th>Область гиперболичности</th><th>Область эллиптичности</th></tr>
<tr><td>$1-x^2+y^2=0$</td><td>$1-x^2+y^2>0$</td><td>$1-x^2+y^2<0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Уравнение $1-x^2+y^2=0$ на координатной плоскости Oxy определяет гиперболу, которая является границей областей

</td></tr>
<tr><td></td><td>Между ветвями гиперболы</td><td></td></tr>
</table>

№ 36 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0.$$

Определение типа уравнения:

$$d = x^2 - x\cdot(x-1) = x$$

Области		
параболичности	гиперболичности	эллиптичности
$x = 0$	$x > 0$	$x < 0$

Область параболичности

При $x = 0$ уравнение принимает вид: $u_{yy} = 0$ (канонический)

Уравнение характеристик:

$$x(dy)^2 - 2xdxdy + (x-1)(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow x(dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0.$$

$x > 0$	$x < 0$
$\left(\sqrt{x}\right)^2(dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0.$	$\left(\sqrt{-x}\right)^2(dy-dx)^2 + (dx)^2 = 0.$

Область гиперболичности

$$\left(\sqrt{x}\right)^2(dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 0, \\ dy - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 0 \end{array}\right.$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2\sqrt{x} = c_1,$$
$$y - x - 2\sqrt{x} = c_2$$

Замена

$$\begin{cases} \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \\ \eta = y - x - 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$u(x,y) = v(y - x + 2\sqrt{x}, y - x - 2\sqrt{x})$$

Выражение производных функции u через новые переменные:

$$0 \left| \; u_x = v_\xi\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_\eta\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right.$$

$$\begin{array}{r|l}
0 & u_y = v_\xi + v_\eta \\
x & u_{xx} = v_{\xi\xi}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2v_{\xi\eta}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+ \\
 & \qquad + v_{\eta\eta}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - v_\xi\frac{1}{2x\sqrt{x}} + v_\eta\frac{1}{2x\sqrt{x}} \\
x-1 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
2x & u_{xy} = v_{\xi\xi}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_{\xi\eta}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_{\eta\eta}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)
\end{array}$$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$x\cdot\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x - 1 + 2x\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$	
$v_{\eta\eta}$	$x\cdot\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x - 1 + 2x\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$	
$v_{\xi\eta}$	$2x\left(1-\frac{1}{x}\right) + 2(x-1) - 4x = -4$	
v_ξ	$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{2}{\xi-\eta}$
v_η	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{\xi-\eta}$

Канонический вид: $v_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}(v_\xi - v_\eta) = 0.$

Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 75-76: № 34 (2), 35 (3), 36 (1, завершить)

25.10.2018

Занятие № 8

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения.

Задание 1. Завершение преобразования **в № 36 (1)**

<u>Область эллиптичности</u>

$$\left(\sqrt{-x}\right)^2 (dy-dx)^2 + (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & dy - \left(1+\frac{i}{\sqrt{-x}}\right)dx = 0, \\ & dy - \left(1-\frac{i}{\sqrt{-x}}\right)dx = 0 \end{aligned}\right.$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2i\sqrt{-x} = c_1,$$
$$y - x - 2i\sqrt{-x} = c_2$$

Замена

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = 2\sqrt{-x} \end{cases}$$

$$u(x,y) = v(y-x, 2\sqrt{-x})$$

Выражение производных функции *u* через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l}
0 & u_x = -v_\xi - v_\eta \frac{1}{\sqrt{-x}} \\
0 & u_y = v_\xi \\
x & u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta}\frac{1}{\sqrt{-x}} - v_{\eta\eta}\frac{1}{x} + v_\eta \frac{1}{2x\sqrt{-x}} \\
x-1 & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\
2x & u_{xy} = -v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta}\frac{1}{\sqrt{-x}}
\end{array}$$

Построение канонического уравнения:

$$\begin{array}{c|c|}
v_{\xi\xi} & x + x - 1 - 2x = -1
\end{array}$$

$v_{\eta\eta}$	-1	
$v_{\xi\eta}$	$2x\frac{1}{\sqrt{-x}}-2x\frac{1}{\sqrt{-x}}=0$	
v_{ξ}	0	
v_{η}	$\frac{1}{2\sqrt{-x}}$	$\frac{1}{\eta}$

Канонический вид: $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}v_{\eta}=0.$

Задание 1. Постройте общее решение уравнения

$$xu_{xx}-4x^2u_{xy}+4x^3u_{yy}+u_x-4xu_y-x(y+x^2)=0. \qquad (1)$$

1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости за исключением точек прямой $x = 0$.
2) Определение типа уравнения:

   $d=4x^4-4x^4=0 \Rightarrow$ уравнение имеет параболический тип.
3) Решение уравнения характеристик:

$$x(dy)^2+4x^2dydx+4x^3(dx)^2=0 \Leftrightarrow (dy+2xdx)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow dy+2xdx=0 \Rightarrow y+x^2=C.$$

4) Переход к новым переменным:

$$\xi=y+x^2, \quad \eta=x, \quad u(x,y)\leftrightarrow v(\xi,\eta).$$
$$u(x,y)=v(y+x^2,x).$$

5) Выражение производных функции u через новые переменные:

1	$u_x=2xv_{\xi}+v_{\eta}$
$-4x$	$u_y=v_{\xi}$
x	$u_{xx}=4x^2v_{\xi\xi}+4xv_{\xi\eta}+v_{\eta\eta}+2v_{\xi}$
$4x^3$	$u_{yy}=v_{\xi\xi}$

$$-4x^2 \,\Big|\, u_{xy} = 2xv_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}$$

6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_{ξ}	v_{η}	Свободное слагаемое
0	x	0	0	1	$-x\,(y+x^2)$
	η			1	$-\xi\eta$
	$\eta \neq 0$				

Канонический вид:

$$\eta v_{\eta\eta} + v_{\eta} = \xi\eta \tag{2}$$

7) Построение общего решения уравнения (2):

$$\eta v_{\eta\eta} + v_{\eta} = \xi\eta \quad \Leftrightarrow \quad (\eta v_{\eta})'_{\eta} = \xi\eta,$$

$$\eta v_{\eta} = \frac{\xi\eta^2}{2} + C(\xi), \qquad v_{\eta} = \frac{\xi\eta}{2} + \frac{C(\xi)}{\eta},$$

$$v(\xi,\eta) = \frac{\xi\eta^2}{4} + C(\xi)\ln|\eta| + \Phi(\xi).$$

8) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2(y+x^2)}{4} + C\left(y+x^2\right)\ln|x| + \Phi\left(y+x^2\right)} \tag{3}$$

Замечание. Так как переменная η может быть задана любым выражением, при котором преобразование независимых переменных будет невырожденным, то и канонический вид может быть другим. Так, если новые переменные ввести следующим образом:

$$\xi = y + x^2, \quad \eta = y, \quad u(x,y) \leftrightarrow v(\xi,\eta),$$

то канонический вид для уравнения (1) будет следующим:

$$(\xi - \eta)v_{\eta\eta} - v_{\eta} = \frac{\xi}{4}.$$

Его решение:

$$(\xi-\eta)v_{\eta\eta} - v_\eta = \frac{\xi}{4} \Leftrightarrow ((\xi-\eta)v_\eta)'_\eta = \frac{\xi}{4}, \quad (\xi-\eta)v_\eta = \frac{\xi\eta}{4} + C(\xi),$$

$$v_\eta = \frac{\xi\eta}{4(\xi-\eta)} + \frac{C(\xi)}{\xi-\eta}, \quad v = -C(\xi)\ln|\eta-\xi| - \tfrac{\xi}{4}\left(\eta + \xi\ln|\eta-\xi|\right) + \Phi(\xi).$$

Обозначив $\Psi(\xi) = -C(\xi) - \frac{\xi^2}{4}$, получим решение уравнения (2)

$$v(\xi,\eta) = \Psi(\xi)\ln|\eta-\xi| - \frac{\xi\eta}{4} + \Phi(\xi).$$

Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1) в следующем виде:

$$u(x,y) = \Psi\left(y+x^2\right)\ln x^2 - \frac{y(y+x^2)}{4} + \Phi\left(y+x^2\right),$$

Можно показать, что полученное выражение равносильно (3), полагая:

$$\Psi\left(y+x^2\right) = \tfrac{1}{2}C(y+x^2) + \frac{(y+x^2)^2}{4}. \qquad \square$$

Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 76: №№ 35 (3), 36 (4).

1.11.2018

Занятие № 9

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.

№ 40 (2). Найти решение уравнения

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(x,0) = 2x, \quad u_y(x,0) = 1.$

1) Определение типа уравнения:

$d = 4 + 5 = 9 > 0 \;\Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип.

2) Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2-4dydx-5(dx)^2=0 \;\Leftrightarrow\; (dy-2dx)^2-9(dx)^2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy-5dx=0, \\ dy+dx=0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-5x=C_1, \\ y+x=C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi=y-5x,\quad \eta=y+x,\quad u(x,y)\leftrightarrow v(\xi,\eta).$$

$$u(x,y)=v(y-5x.y+x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} 1 & u_x=-5v_\xi+v_\eta \\ -1 & u_y=v_\xi+v_\eta \\ 1 & u_{xx}=25v_{\xi\xi}-10v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta} \\ -5 & u_{yy}=v_{\xi\xi}+2v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta} \\ 4 & u_{xy}=-5v_{\xi\xi}-4v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_ξ	v_η
0	0	–36	–6	0

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta}+\frac{1}{6}v_\xi=0. \qquad (2)$$

6) Построение общего решения уравнения (2):

$$v_{\xi\eta}+\tfrac{1}{6}v_\xi=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} v_\xi=w, \\ w_\eta+\tfrac{1}{6}w=0. \end{cases}$$

$$w_\eta+\tfrac{1}{6}w=0,\qquad w(\xi,\eta)=C(\xi)e^{-\frac{1}{6}\eta},$$

$$v_\xi=C(\xi)e^{-\frac{1}{6}\eta},\qquad v(\xi,\eta)=\Phi(\xi)e^{-\frac{1}{6}\eta}+\mathrm{F}(\eta).$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$u(x,y)=\Phi(y-5x)e^{-\frac{1}{6}(y+x)}+\mathrm{F}(y+x). \qquad (3)$$

8) *<u>Построение частного решения</u>*

Найдем производную:

$$u_y(x,y)=\Phi'(y-5x)e^{-\frac{1}{6}(y+x)}-\frac{1}{6}\Phi(y-5x)e^{-\frac{1}{6}(y+x)}+F'(y+x).$$

Подставляя (3) в заданные условия $u(x,0)=2x,\quad u_y(x,0)=1,$ получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} u(x,0)=\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}+F(x)=2x, \\ u_y(x,0)=\Phi'(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}-\frac{1}{6}\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}+F'(x)=1. \end{cases}$$

Решение системы (методом подстановки)

$$\begin{cases} F(x)=2x-\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}, \\ \Phi'(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}-\frac{1}{6}\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}+2+5\Phi'(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}+\frac{1}{6}\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}=1 \end{cases}$$

$$6\Phi'(-5x)e^{-\frac{x}{6}}=-1,\quad \Phi'(-5x)=-\frac{1}{6}e^{\frac{x}{6}},\quad \Phi'(t)=-\frac{1}{6}e^{-\frac{t}{30}},$$

$$\Phi(t)=5e^{-\frac{t}{30}}+C,\quad C-const.$$

Подставляя полученное выражение для Φ в первое уравнение системы, найдем

$$F(x)=2x-5-C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x,y)=2(y+x)-5+5e^{-\frac{1}{5}y}.}$$

№ 40 (3). Найти решение уравнения

$$(\sin^2 y-4)u_{xx}-2\sin y\cdot u_{xy}+u_{yy}-\cos y\cdot u_x=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(\cos y, y) = \cos y$, $u_x(\cos y, y) = \sin y$.

1) Определение типа уравнения:

$d = \sin^2 y - (\sin^2 y - 4) = 4 > 0 \;\Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип.

2) Решение уравнения характеристик:

$$(\sin^2 y - 4)(dy)^2 + 2\sin y dy dx + (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (dx + \sin y dy)^2 - 4(dy)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dx + (\sin y - 2)dy = 0, \\ dx + (\sin y + 2)dy = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \cos y - 2y = C_1, \\ x - \cos y + 2y = C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = x - \cos y - 2y, \quad \eta = x - \cos y + 2y, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(x - \cos y - 2y, x - \cos y + 2y).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} -\cos y & u_x = v_\xi + v_\eta \\ 0 & u_y = (\sin y - 2)v_\xi + (\sin y + 2)v_\eta \\ (\sin^2 y - 4) & u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ 1 & u_{yy} = (\sin y - 2)^2 v_{\xi\xi} + 2(\sin^2 y - 4)v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)^2 v_{\eta\eta} + \\ & \qquad + \cos y \cdot v_\xi + \cos y \cdot v_\eta \\ -2\sin y & u_{xy} = (\sin y - 2)v_{\xi\xi} + 2\sin y \cdot v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y - 2)^2 - 2\sin y(\sin y - 2) = 0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y + 2)^2 - 2\sin y(\sin y + 2) = 0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 y - 4) + 2(\sin^2 y - 4) - 4\sin^2 y = -16$
v_ξ	$-\cos y + \cos y = 0$

$$v_\eta \;\Big|\; -\cos y + \cos y = 0$$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0$$

6) Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi,\eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta). \qquad (2)$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$u(x,y) = \Phi(x - \cos y - 2y) + \Psi(x - \cos y + 2y). \qquad (3)$$

8) *Построение частного решения*

Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(\cos y, y) = \cos y, \quad u_x(\cos y, y) = \sin y,$$

получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} u(\cos y, y) = \Phi(-2y) + F(2y) = \cos y, \\ u_x(\cos y, y) = \Phi'(-2y) + F'(2y) = \sin y. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение системы (методом подстановки)

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$-2\Phi'(-2y) + 2F'(2y) = -\sin y \;\Rightarrow\; \Phi'(-2y) = \tfrac{1}{2}\sin y + F'(2y).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$\tfrac{1}{2}\sin y + F'(2y) + F'(2y) = \sin y \;\Rightarrow\; F'(2y) = \tfrac{1}{4}\sin y,$$

$$F'(t) = \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{t}{2}, \quad F(t) = -\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{t}{2} + C, \quad C - const.$$

Найденное выражение для функции F подставляем в первое уравнение системы (4):

$$\Phi(-2y) - \tfrac{1}{2}\cos y + C = \cos y \;\Rightarrow\; \Phi(-2y) = \tfrac{3}{2}\cos y - C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Phi(t) = \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{t}{2} - C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$u(x,y)=\frac{3}{2}\cos\frac{x-\cos y-2y}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x-\cos y+2y}{2}.$$

Домашнее задание

Гл. 2, § 7, с. 86: № 40 (1, 5а)

Подготовка к контрольной работе. Выполните следующие задания:

1. Укажите области на плоскости XOY, где сохраняется тип уравнения:

$$y\,u_{xx}-x(\cos\pi x+1)u_{yy}+x\,u_x-u=0$$

2. Решите задачу Коши:

$$u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-(4-\sin^2 x)u_{yy}+8u_x-(16+8\sin x+\cos x)u_y=0,$$

$$u(x,\cos x)=e^{-6x}+2x,\qquad u_y(x,\cos x)=1-e^{-6x}.$$