



Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

6.09.2018

**Занятие № 1. Простейшие уравнения в частных производных.
Общее решение**

Гл. 2, § 2, с. 55: №№ 4, 6, 7 (1,3).

№ 7 (1): $xu_{xy} + u_y = 0$

2 способ (понижение порядка уравнения с помощью замены).

1) При $x \neq 0$ имеем

$$xu_{xy} + u_y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_y, \\ xv_x + v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2) Построим общее решение уравнения

$$xv_x + v = 0 \quad (2)$$

методом разделения переменных, рассматривая уравнение (2) как «обыкновенное дифференциальное уравнение», в котором переменную y считаем параметром):

$$\frac{\partial v}{v} = -\frac{\partial x}{x}, \quad \ln |v| = -\ln |x| + \ln |C_1(y)|, \quad v(x, y) = \frac{C_1(y)}{x}.$$

3) Подставив найденное для v выражение в 1-е уравнение системы (1), получим уравнение:

$$u_y = \frac{C_1(y)}{x},$$

интегрируя которое по y , найдем

$$u(x, y) = \frac{C_2(y)}{x} + C_3(x).$$

где $C_2(y)$ и $C_3(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

1 способ

Если $x \neq 0$:

$$xu_{xy} + u_y = 0, \quad (xu_y)'_x = 0, \quad xu_y = C(y),$$

$$u_y = \frac{C(y)}{x}, \quad u(x, y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x},$$

где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Ответ: $u(x, y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x}.$

№ 7 (3): $u_{xy} + 5u_x = xy^2$

Этапы решения:

$$1) \quad u_{xy} + 5u_x = xy^2 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_x, \\ v_y + 5v = xy^2. \end{cases}$$

2) Построение общего решения уравнения $v_y + 5v = xy^2$ (*):

А) построение общего решения соответствующего однородного уравнения $v_y + 5v = 0$: $v(x, y) = e^{-5y}C(x)$, где $C(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{\text{част}}(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + D(x).$$

5	$v_{\text{част}}(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + D(x)$
1	$(v_{\text{част}})'_y = 2yA(x) + B(x)$

$y^2 :$	$5A(x) = x,$	} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A(x) = \frac{x}{5}, \\ B(x) = -\frac{2x}{25}, \\ D(x) = \frac{2x}{125}. \end{array} \right.
$y :$	$5B(x) + 2A(x) = 0,$	
$y^0 :$	$5D(x) + B(x) = 0.$	

Результат: $v_{\text{част}}(x, y) = \frac{x}{5} \left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25} \right).$

В) общее решение:

$$v(x, y) = e^{-5y} C(x) + \frac{x}{5} \left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25} \right).$$

Замечание. Общее решение уравнения (*) может быть построено методом вариации:

Решение неоднородного уравнения (*) будем искать в виде

$$v(x, y) = C(x, y)e^{-5y}. \quad (1)$$

Подставляя (1) в (*), получим

$$C'_y(x, y)e^{-5y} - 5C(x, y)e^{-5y} + 5C(x, y)e^{-5y} = xy^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C'_y(x, y) = xy^2 e^{5y}.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$C(x, y) = \frac{x}{125} e^{5y} (25y^2 - 10y + 2) + \tilde{C}(x). \quad (2)$$

$$\int x y^2 \cdot e^{5y} dy \text{ simplify } \rightarrow \frac{x \cdot e^{5 \cdot y} \cdot (25 \cdot y^2 - 10 \cdot y + 2)}{125}$$

Подставляя (2) в (1), получим общее решение уравнения (*):

$$v(x, y) = \frac{x}{125} (25y^2 - 10y + 2) + \tilde{C}(x) e^{-5y}.$$

3) Построение общего решения уравнения $u_x = v(x, y)$:

$$u(x, y) = e^{-5y} C_1(x) + \frac{x^2}{10} \left(y^2 - \frac{2}{5} y + \frac{2}{25} \right) + C_2(y), \text{ где } C_1(x) \text{ и}$$

$C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Ответ: $u(x, y) = e^{-5y} C_1(x) + \frac{x^2}{10} \left(y^2 - \frac{2}{5} y + \frac{2}{25} \right) + C_2(y).$



Домашнее задание

С. 48 § 2 (разбор примеров).

С. 54-55: №№ 5, 6 (вычисление интегралов), № 7 (2).

Повторить: *решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом вариации. Решите уравнение:*

$$y'(x) + 5xy(x) = f(x), \text{ где } f(x) - \text{ заданная функция.}$$

13.09.2018

Занятие № 2. Простейшие уравнения в частных производных.
Общее решение

с. 55, № 7 (5): $u_{xy} + \frac{1}{6} u_x = 0$

$$\begin{cases} u_x = v, \\ v_y + \frac{1}{6} v = 0 \end{cases}$$

$$v(x, y) = C(x)e^{-\frac{1}{6}y}, \quad u_x = C(x)e^{-\frac{1}{6}y}, \quad u(x, y) = e^{-\frac{1}{6}y} \int C(x) dx + C_1(y),$$

$u(x, y) = e^{-\frac{1}{6}y} C_2(x) + C_1(y)$, где $C_1(y)$ и $C_2(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

с. 55, № 7 (7): $u_{yy} + \frac{1}{y}u_y = 0$

Так как $y \neq 0$, то

$$u_{yy} + \frac{1}{y}u_y = 0, \quad yu_{yy} + u_y = 0, \quad (yu_y)_y = 0, \quad yu_y = C_1(x), \quad u_y = \frac{C_1(x)}{y},$$

$u(x, y) = C_1(x) \ln|y| + C_2(x)$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Построить общее решение уравнения: $u_{xy} + 5xu_x = x + y$.

Этапы решения:

$$1) \quad u_{xy} + 5xu_x = x + y \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_x, \\ v_y + 5xv = x + y. \end{cases}$$

2) Построение общего решения уравнения $v_y + 5xv = x + y$ (*):

А) построение общего решения соответствующего однородного уравнения $v_y + 5xv = 0$: $v(x, y) = e^{-5yx}C(x)$, где $C(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{\text{част}}(x, y) = A(x)y + B(x).$$

$$\text{Результат: } v_{\text{част}}(x, y) = \frac{y}{5x} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25x^2}, \quad x \neq 0.$$

В) общее решение:

$$v(x, y) = e^{-5yx}C(x) + \frac{y}{5x} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25x^2}, \quad x \neq 0.$$

3) Построение общего решения уравнения $u_x = v(x, y)$:

$$u(x, y) = \int C(x)e^{-5xy} dx + \frac{y \ln|x|}{5} + \frac{x}{5} + \frac{1}{25x} + C_1(y), \quad x \neq 0,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Замечание. Если $x = 0$, то для уравнения (*) имеем:

$$v_y(0, y) = y \Rightarrow v(0, y) = \frac{y^2}{2} + C, \quad C - \text{произвольная константа.}$$

Возвращаясь к замене, получим уравнение:

$$u_x(0, y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Из него решение заданного уравнения при $x = 0$ путем интегрирования по x нельзя.

$$\text{с. 55, № 8 (1): } u_x + \alpha(y)u = f(x, y), \quad u = u(x, y). \quad (1)$$

1) Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$u_x + \alpha(y)u = 0. \quad (2)$$

Так уравнение является линейным и его коэффициенты не зависят от x , то построив характеристическое уравнение

$$\lambda + \alpha(y) = 0, \quad \lambda = -\alpha(y),$$

найдем общее решение уравнения (2):

$$u(x, y) = C(y)e^{-\alpha(y)x},$$

где $C(y)$ – произвольная дифференцируемая функция.

2) Общее решение неоднородного уравнения (1) можно построить методом вариации. Будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$u(x, y) = C(x, y)e^{-\alpha(y)x}, \quad (3)$$

Подставив (3) в (1), получим

$$C'_x(x, y)e^{-\alpha(y)x} - \alpha(y)C(x, y)e^{-\alpha(y)x} + \alpha(y)C(x, y)e^{-\alpha(y)x} = f(x, y),$$

$$C'_x(x, y) = e^{\alpha(y)x} f(x, y).$$

Интегрируя последнее уравнение по переменной x , найдем

$$C(x, y) = \int_0^x e^{\alpha(y)\xi} f(\xi, y) d\xi + A(y), \quad (4)$$

где $A(y)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Подставляя (4) в (3), получим искомое решение:

$$u(x, y) = e^{-\alpha(y)x} \int_0^x e^{\alpha(y)\xi} f(\xi, y) d\xi + A(y) e^{-\alpha(y)x}.$$

с. 55, № 9: Найти решение уравнения $u_{xx} = f(x, y)$, удовлетворяющее условиям $u(0, y) = \sin y$, $u(y, y) = y$.

Построим общее решение заданного уравнения:

$$\begin{aligned} u_{xx} = f(x, y) &\rightarrow u_x = \int_0^x f(\xi, y) d\xi + C_1(y) \rightarrow \\ &\rightarrow u(x, y) = \int_0^x \int_0^z f(\xi, y) d\xi dz + C_1(y)x + C_2(y). \end{aligned} \quad (*)$$

Здесь $C_1(y)$, $C_2(y)$ – произвольные функции, которые необходимо определить, используя заданные условия. Подчинив построенное общее решение (*) заданным условиям, будем иметь:

$$u(0, y) = C_2(y) = \sin y,$$

$$u(y, y) = \int_0^y \int_0^z f(\xi, y) d\xi dz + C_1(y)y + C_2(y) = y.$$

Отсюда найдем:

$$C_2(y) = \sin y, \quad C_1(y) = \frac{1}{y} \left(y - \sin y - \int_0^y \int_0^z f(\xi, y) d\xi dz \right).$$

Гл. 2, § 3, с. 64: № 10

Для функции $u = \frac{y}{x} e^{\frac{xz}{y^2}}$ имеем

$$u_x = e^{\frac{xz}{y^2}} \left(\frac{zx - y^2}{x^2 y} \right), \quad u_y = e^{\frac{xz}{y^2}} \left(\frac{y^2 - 2xz}{y^2 x} \right), \quad u_x = \frac{1}{y} e^{\frac{xz}{y^2}}.$$



Домашнее задание

С. 55: №№ 7 (4,6,8), 8 (2),

С. 64: № 10 (завершить).

Решите уравнение: $u_{xy} + xu_x = y$, $u = u(x, y)$.

Лекция: Уравнения в частных производных 1-го порядка.

Метод характеристик.