Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

§ 1. Первая краевая задача[1] для уравнения Лапласа в круге и вне круга

Пусть область D есть открытый круг (внутренность круга) с центром в начале координат и радиуса a, S – его граница. Замкнутая область $\overline{D} = D \cup S$. Будем рассматривать краевую задачу для уравнения Лапласа с граничным условием Дирихле с неизвестной функцией $u = u(M)$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad M \in \Omega, \\ u(P) = f(P), \quad P \in S, \end{cases}$$

где область $\Omega = D$, если рассматривается задача в круге (внутренняя краевая задача), и $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{D}$ – если вне круга (внешняя краевая задача).

Для решения задачи удобнее перейти к полярным координатам, тогда $u = u(r, \varphi)$. Так как оператор Лапласа в полярных координатах определяется выражением

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

то рассматриваемая краевая задача запишется в виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r < a \ \ (r > a), \tag{1}$$

$$u(a, \varphi) = f(\varphi). \tag{2}$$

Здесь $r < a$ для внутренней задачи, $r > a$ – для внешней. Если требуется построить классическое решение краевой задачи, то в рассматриваемой области функция $u(r, \varphi)$ должна обладать свойствами периодичности

$$u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi) \tag{3}$$

и ограниченности

$$\begin{aligned} &|u(0, \varphi)| < \infty \qquad \text{(для внутренней задачи)}, \\ &|u(\infty, \varphi)| < \infty \quad \text{(для внешней задачи)}. \end{aligned} \tag{4}$$

---

[1] В тексте лекции изображение используется для указания на то, что утверждение должно быть доказано или проверено самостоятельно.

Применим к решению краевой задачи (1)-(4) метод разделения переменных (метод Фурье). Следуя схеме метода, будем искать ненулевое решение в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{5}$$

Будем называть функцию $R(r)$ радиальной составляющей решения (радиальной функцией), а $\Phi(\varphi)$ – угловой. Подставим (5) в уравнение (1) и разделим переменные. В результате получим равенство

$$\frac{r^2\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = C. \tag{6}$$

Из условия (3) следует периодичность функции $\Phi(\varphi)$ с периодом 2π. Присоединяя условие периодичности к дифференциальному уравнению для $\Phi(\varphi)$, получим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Phi'' + C\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases} \tag{7}$$

Для радиальной функции $R(r)$, учитывая условия (4), будем иметь

$$r^2R'' + rR' - CR = 0, \quad r < a \ \ (r > a), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &|R(0)| < \infty, && (r < a), \\ &|R(\infty)| < \infty, && (r > a). \end{aligned} \tag{9}$$

Можно показать, что задача Штурма-Лиувилля (7) имеет следующее решение (собственные значения и собственные функции):

$$C_n = n^2, \ \ \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \ \ n = 0, 1, 2, ... \tag{10}$$

Здесь A_n и B_n – произвольные постоянные, которые удовлетворяют условию $|A_n| + |B_n| \neq 0$.

Для каждого значения параметра $C = C_n = n^2$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ найдем решение $R(r) = R_n(r)$ задачи (8)-(9).

1. При $n = 0$ имеем $r^2R'' + rR' = 0$, $rR'' + R' = 0$, $(rR')' = 0$. Интегрируя уравнение, найдем $R(r) = D\ln r + E$. Очевидно, условия ограниченности (9) будут выполнены, когда $D = 0$. Полагая $E = 1$, получим радиальную функцию $R_0(r) = 1$.

2. Уравнение (8) является уравнением Эйлера. Будем искать его решение в виде $R = r^{\lambda}$. Подставив это выражение в (8)

$$\lambda(\lambda-1)r^{\lambda} + \lambda r^{\lambda} - n^2 r^{\lambda} = 0,$$

получим соответствующее характеристическое уравнение и его корни:

$$\lambda^2 - n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm n.$$

Зная фундаментальную систему решений $\{r^n,\ r^{-n}\}$ уравнения (8) при $n \geq 1$, построим его общее решение

$$R_n(r) = D_n r^n + E_n r^{-n},\ \ n \geq 1.$$

Условие ограниченности (9) будет выполнено, если $E_n = 0$, когда $r < a$, и $D_n = 0$, когда $r > a$. Полагая второй коэффициент равным 1, получим при $n \geq 1$:

$$R_n(r) = \begin{cases} r^n, & r < a, \\ r^{-n}, & r > a. \end{cases} \tag{11}$$

Итак, нашли бесконечное счетное множество решений уравнения (1) вида (5) в круге ($r < a$) и вне круга ($r > a$):

$$u_0(r,\varphi) = R_0(r)\Phi_0(\varphi) = A_0,$$

$$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\, r^n, & r < a,\ n \geq 1, \\ (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\, r^{-n}, & r > a,\ n \geq 1, \end{cases}$$

каждое из которых удовлетворяет требуемым условиям периодичности (3) и ограниченности (4).

Следуя общей схеме метода Фурье, составим ряд из найденных решений

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot \begin{cases} r^n, & r < a, \\ r^{-n}, & r > a. \end{cases} \tag{12}$$

Формально построенное решение рассматривается как общее решение уравнения (1), из которого надо выделить частное, используя граничное условие. Подчинив ряд (12) граничному условию (2), будем иметь

$$u(a,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot \left\{ \begin{array}{ll} a^n, & (r < a) \\ a^{-n}, & (r > a) \end{array} \right\} = f(\varphi) \tag{13}$$

Зная разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi\, d\psi \quad (n = 0, 1, 2, ...), \\ \beta_n &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi\, d\psi \quad (n = 1, 2, ...), \end{aligned} \tag{15}$$

сравнив ряды(13) и (14), получим

$$\begin{array}{ll} A_0 = \dfrac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \dfrac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \dfrac{\beta_n}{a^n} & \text{для внутренней задачи,} \\ A_0 = \dfrac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = \beta_n a^n & \text{для внешней задачи.} \end{array}$$

Таким образом, получили формальное решение первой внутренней краевой задачи – в круге:

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)\left(\frac{r}{a}\right)^n, \tag{16}$$

и внешней – вне круга:

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)\left(\frac{a}{r}\right)^n. \tag{17}$$

Решение двух задач можно записать в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)\, t^n. \tag{18}$$

где

$$t = \begin{cases} \dfrac{r}{a}, & r \le a, \\ \dfrac{a}{r}, & r \ge a. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема. *Если функция $f(\varphi)$ является 2π-периодической, непрерывной вместе с первой производной $f'(\varphi)$, тогда классическое решение задачи Дирихле (1)-(4) существует и определяется формулами (16) – для внутренней задачи, и (17) – для внешней, в которых коэффициенты $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n,\ n \ge 1$ определяются по формулам (15).*

Доказательство.$\triangleright$ Сначала покажем, что ряд (18) в области $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ определяет непрерывную функцию. Так как в этой области $t \le 1$, то соответствующим мажорантным для ряда (18) будет ряд

$$\frac{|\alpha_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|),$$

который сходится по свойствам коэффициентов Фурье. Тогда по теореме Вейерштрасса ряд (18) равномерно сходится и как ряд непрерывных функций определяет непрерывную функцию.

Далее покажем, что ряд (18) допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ до второго порядка включительно в Ω. Для этого, формально построив ряды для производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(-\alpha_n \sin n\varphi + \beta_n \cos n\varphi) t^n, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) t^n, \end{aligned} \tag{20}$$

выясним, будут ли они равномерно сходящимися в Ω. Так как функция $f(\varphi)$ по условию 2π-периодична и непрерывна, то имеем $|f(\varphi)| \le M$, где M – некоторая константа. При этом для коэффициентов Фурье функции $f(\varphi)$ будут справедливы следующие оценки

$$|\alpha_n| \le 2M, \quad |\beta_n| \le 2M, \ \ n = 1, 2, ...$$

Тогда для рядов (20) мажорантными будут соответственно ряды

$$4M \sum_{n=1}^{+\infty} n t^n \quad \text{и} \quad 4M \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 t^n.$$

Так как $|t| = t < 1$ в Ω и

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)t^{n+1}}{nt^n}\right| = t < 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2t^{n+1}}{n^2t^n}\right| = t < 1,$$

то, по признаку Даламбера, мажорантные ряды сходится и, следовательно, ряды (20) равномерно сходятся и определяют непрерывные производные u_φ и $u_{\varphi\varphi}$.

Аналогично исследуются ряды для производных u_r и u_{rr}, и проверяется возможность почленного дифференцирования ряда (18) по переменной r. При этом при построении производных надо учитывать разную зависимость t от r для внутренней $(r < a)$ и внешней $(r > a)$ краевых задач.

Из возможности почленного дифференцирования ряда (18) следует применимость принципа суперпозиции. Так как каждый член ряда (18) (а это функции $u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi)$) является решением уравнения Лапласа в Ω, то и сам ряд является решением уравнения Лапласа в той же области.

И, наконец, ряд (18) удовлетворяет граничному условию (2) в силу непрерывности функции $u(r,\varphi)$, которую он определяет, и определению коэффициентов α_n и β_n как коэффициентов Фурье функции $f(\varphi)$. При $r = a$ (тогда $t = 1$) ряд (18) дает следующий ряд:

$$u(a,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi),$$

который является рядом Фурье функции $f(\varphi)$.

Таким образом, установлено, что ряд (18) удовлетворяет всем условиям рассматриваемой задачи (1)-(4). $\triangleleft$

Интеграл Пуассона. Получим иную форму записи решения задачи Дирихле для круга. Для этого преобразуем решение (18), подставляя в него выражения (15) для коэффициентов α_n и β_n и меняя порядок суммирования и интегрирования:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} t^n(\cos n\varphi\cos n\psi + \sin n\varphi\sin n\psi)\right)d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} t^n\cos n(\varphi-\psi)\right)d\psi. \qquad (21)$$

Рассмотрим ряд

$$S(\varphi) \equiv \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \cos n\varphi.$$

Так как

$$\cos n\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{n\varphi \mathrm{i}} + e^{-n\varphi \mathrm{i}}\right),$$

то для $S(\varphi)$ будем иметь

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \left(e^{n\varphi \mathrm{i}} + e^{-n\varphi \mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(te^{\varphi \mathrm{i}}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(te^{-\varphi \mathrm{i}}\right)^n\right].$$

Так как $|te^{\pm\varphi \mathrm{i}}| = t < 1$ в Ω, то, применив формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$S(\varphi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{te^{\varphi \mathrm{i}}}{1 - te^{\varphi \mathrm{i}}} + \frac{te^{-\varphi \mathrm{i}}}{1 - te^{-\varphi \mathrm{i}}}\right) = \frac{1}{2}\frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos\varphi + t^2}.$$

Используя полученное для $S(\varphi)$ выражение, формулу (21) для $u(r,\varphi)$, рассматриваемой в области Ω, приведем к виду

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos(\varphi - \psi) + t^2}\,d\psi. \tag{23}$$

Интеграл в правой части полученной формулы (23) называют **интегралом Пуассона для круга**.

Формула (23) дает решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге (когда $t = \frac{r}{a} < 1$):

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi - \psi) + r^2}\,d\psi, \quad r < a,$$

и вне круга (когда $t = \frac{a}{r} < 1$):

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{r^2 - a^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi - \psi) + r^2}\,d\psi, \quad r > a.$$

А на границе области, т. е. при $t = 1$, $u(a,\varphi) = f(\varphi)$.

§ 2. Задача Неймана для уравнения Лапласа в круге

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Лапласа в круге (внутреннюю задачу):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0,\quad r<a,$$

$$u_r(a,\varphi)=f(\varphi), \tag{24}$$

Здесь граничное условие (24) – это условие Неймана. Следует учитывать, что функция $u=u(r,\varphi)$ должна удовлетворять условиям:

$$u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi),\quad |u(0,\varphi)|<\infty. \tag{$\star$}$$

При рассмотрении первой краевой задачи было получено общее решение уравнения Лапласа в круге, удовлетворяющее условиям ($\star$):

$$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)r^n. \tag{25}$$

Подчиним (25) граничному условию (24). Так как

$$u_r(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)nr^{n-1},$$

то при $r=a$ будем иметь

$$u_r(a,\varphi)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)na^{n-1}=f(\varphi). \tag{26}$$

Зная разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi),$$

где коэффициенты определяются по формулам (15), сравнив ряд (26) и ряд Фурье, получим:

$$nA_n\,a^{n-1}=\alpha_n,\quad nB_n\,a^{n-1}=\beta_n,\quad n=1,2,.... \tag{27}$$

А так как коэффициенту α_0 ряда Фурье функции $f(\varphi)$ соответствует коэффициент ряда (26), равный нулю, то из определения α_0 получаем условие

$$\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi = 0, \tag{28}$$

только при выполнении которого рассматриваемая задача будет иметь решение. Из (27) найдем

$$A_n = \frac{\alpha_n}{na^{n-1}}, \;\; B_n = \frac{\beta_n}{na^{n-1}}, \;\; n = 1, 2, ... \tag{29}$$

Заметим, что для определения коэффициента A_0 мы не получили никакого условия, а, значит, A_0 может принимать произвольные значения. Подставив выражения (29) для коэффициентов A_n, B_n $(n = 1, 2, ...)$ в (25), получим

$$u(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)\frac{a}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n, \tag{30}$$

где C – произвольная const.

Можно показать, что если функция $f(\varphi)$ является непрерывной и 2π-периодичной, то формула (30) определяет классическое решение задачи Неймана в круге.

Вывод. *Если выполнено условие (28), то задача Неймана имеет решение, представимое в виде ряда (30), где коэффициенты α_n, β_n – коэффициенты ряда Фурье для функции $f(\varphi)$, которые определяются по формулам (15). Условие (28) называют условием разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге. Заметим, что если решение задачи Неймана существует, то оно неединственно, причем различные решения отличаются на const.*

Постройте решение задачи Неймана для уравнения Лапласа вне круга (внутренней краевой задачи).

Для рассмотренной краевой задачи Неймана можно построить интегральную формулу, аналогичную формуле Пуассона для решения задачи Дирихле. Подставив в решение (30) выражения (15) для коэффициентов α_n и β_n и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$u(r,\varphi)=C+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\cos n\varphi\cos n\psi+\sin n\varphi\sin n\psi)\right)d\psi=$$

$$=C+\frac{a}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\psi)\right)d\psi. \qquad (31)$$

Рассмотрим ряд

$$P(\varphi)\equiv\sum_{n=1}^{+\infty}t^n\sin n\varphi,$$

где $|t|<1$. Так как

$$\sin n\varphi=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{n\varphi\mathrm{i}}-e^{-n\varphi\mathrm{i}}\right),$$

то для $P(\varphi)$ будем иметь

$$P(\varphi)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=1}^{+\infty}t^n\left(e^{n\varphi\mathrm{i}}-e^{-n\varphi\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left(te^{\varphi\mathrm{i}}\right)^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(te^{-\varphi\mathrm{i}}\right)^n\right].$$

Так как $|te^{\pm\varphi\mathrm{i}}|=|t|<1$, то, применив формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$P(\varphi)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{te^{\varphi\mathrm{i}}}{1-te^{\varphi\mathrm{i}}}-\frac{te^{-\varphi\mathrm{i}}}{1-te^{-\varphi\mathrm{i}}}\right)=\frac{t\sin\varphi}{1-2t\cos\varphi+t^2}.$$

Таким образом, получили следующее соотношение

$$\sum_{n=1}^{+\infty}t^n\sin n\varphi=\frac{t\sin\varphi}{1-2t\cos\varphi+t^2}.$$

Проинтегрировав его по φ, получим

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}\cos n\varphi=\frac{1}{2}\ln(1-2t\cos\varphi+t^2)+c,$$

где c – произвольная величина, не зависящая от φ. Рассматривая полученное равенство при $\varphi = 0$:

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = \frac{1}{2}\ln(1-2t+t^2) + c \quad \Leftrightarrow \quad -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = \ln(1-t) + c,$$

и используя разложение

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}, \quad |t| < 1,$$

определим постоянную $c = 0$. В результате получили следующую формулу

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \frac{\cos n\varphi}{n} = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2t\cos\varphi + t^2}}, \quad |t| < 1. \tag{32}$$

Учитывая, что внутри круга $t = \frac{r}{a} < 1$, используя формулу (32), приведем формулу (31) для $u(r,\varphi)$ к виду

$$u(r,\varphi) = C + \frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos(\varphi-\psi) + a^2}}\, d\psi, \quad r < a.$$

Полученная формула и дает интегральное представление решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге (при $r < a$).

§ 3. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в кольце

Пусть область Ω – кольцо с центром в начале координат. Внутренней границей области является окружность радиуса a, внешней – окружность радиуса b. При этом $b > a > 0$.

Задача Дирихле. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \ \ a < r < b, \tag{1}$$

$$u(a,\varphi) = f(\varphi), \quad u(b,\varphi) = g(\varphi). \tag{2}$$

Заметим, что функция $u(r,\varphi)$ должна удовлетворять условию периодичности:

$$u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi),\ \ \forall\varphi.$$

Если искать, следуя схеме метода Фурье, ненулевое ограниченное решение уравнения Лапласа в кольце в виде

$$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi), \tag{3}$$

то можно получить:
1) задачу Штурма-Лиувилля с периодическим условием для угловой составляющей

$$\begin{cases} \Phi''+C\Phi=0, \\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \end{cases} \tag{4}$$

2) уравнение для радиальной составляющей

$$r^2R''+rR'-CR=0, \quad a<r<b. \tag{5}$$

При этом задача (4) имеет решение

$$C_n=n^2,\ \ \Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\ \ n=0,1,2,...,$$

а общим решением уравнения (5) при $c=n^2$ будет:

$$R_0(r)=D_0\ln r+E_0, \quad R_n(r)=D_nr^n+E_nr^{-n},\ n=1,2,\ldots.$$

Заметим, что функции $R_n(r)$ являются ограниченными на отрезке $[a,\,b]$ при любых значениях постоянных D_n и E_n $(n=0,1,2,...)$.

Тогда существует бесконечное счетное множество решений вида (3) уравнения (1) в кольце

$$u_0(r,\varphi)=R_0(r)\Phi_0(\varphi)=A_0\ln r+B_0,$$

$$u_n(r,\varphi)=R_n(r)\Phi_n(\varphi)=$$
$$=\left(A_nr^n+A_{-n}r^{-n}\right)\cos\varphi+\left(B_nr^n+B_{-n}r^{-n}\right)\sin\varphi,$$

каждое из которых удовлетворяет условиям периодичности по переменной φ и ограниченности. Здесь произвольные постоянные A_0, B_0, A_n, A_{-n}, B_n, B_{-n} заменяют следующие выражения:

$$A_0\sim A_0\cdot D_0, \quad B_0\sim A_0\cdot E_0,$$

$$A_n \sim A_n D_n, \quad A_{-n} \sim A_n E_n,$$
$$B_n \sim B_n D_n, \quad B_{-n} \sim B_n E_n.$$

Ряд, составленный из найденных решений

$$u(r,\varphi) = A_0 \ln r + B_0 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \big((A_n r^n + A_{-n} r^{-n}) \cos\varphi + (B_n r^n + B_{-n} r^{-n}) \sin\varphi \big)\,. \tag{6}$$

дает формально построенное общее решение уравнения Лапласа в кольце. Для получения решения задачи (1)-(2) подчиним ряд (6) граничным условиям (2). Будем иметь

$$u(a,\varphi) = A_0 \ln a + B_0 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \big((A_n a^n + A_{-n} a^{-n}) \cos\varphi + (B_n a^n + B_{-n} a^{-n}) \sin\varphi \big) = f(\varphi), \tag{7}$$

$$u(b,\varphi) = A_0 \ln b + B_0 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \big((A_n b^n + A_{-n} b^{-n}) \cos\varphi + (B_n b^n + B_{-n} b^{-n}) \sin\varphi \big) = g(\varphi). \tag{8}$$

Зная разложение граничных функций $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ в ряды Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0^f}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n^f \cos n\varphi + \beta_n^f \sin n\varphi), \tag{9}$$

$$g(\varphi) = \frac{\alpha_0^g}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n^g \cos n\varphi + \beta_n^g \sin n\varphi), \tag{9}$$

где

$$\alpha_n^f = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi, \quad \alpha_n^g = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\psi) \cos n\psi \, d\psi, \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$
$$\beta_n^f = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi, \quad \beta_n^g = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\psi) \sin n\psi \, d\psi, \quad (n = 1, 2, ...), \tag{11}$$

сравнив ряды (7) и (9), (8) и (10), получим:

$$\begin{cases} A_0 \ln a + B_0 = \frac{\alpha_0^f}{2}, \\ A_0 \ln b + B_0 = \frac{\alpha_0^g}{2}; \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} A_n a^n + A_{-n} a^{-n} = \alpha_n^f, \\ A_n b^n + A_{-n} b^{-n} = \alpha_n^g; \end{cases} \qquad \begin{cases} B_n a^n + B_{-n} a^{-n} = \beta_n^f, \\ B_n b^n + B_{-n} b^{-n} = \beta_n^g; \end{cases} \tag{13}$$

$$n = 1, 2, ...$$

Можно показать, что все построенные системы позволяют однозначно определить искомые коэффициенты A_0, B_0, A_n, A_{-n}, B_n, B_{-n} $(n = 1, 2, ...)$:

$$A_0 = \frac{\alpha_0^f - \alpha_0^g}{2(\ln a - \ln b)}, \quad B_0 = \frac{\alpha_0^g \ln a - \alpha_0^f \ln b}{2(\ln a - \ln b)}; \tag{12.1}$$

$$A_n = \frac{b^{-n}\alpha_n^f - a^{-n}\alpha_n^g}{a^n b^{-n} - a^{-n} b^n}, \quad A_{-n} = \frac{a^n \alpha_n^g - b^n \alpha_n^f}{a^n b^{-n} - a^{-n} b^n}; \tag{13.1}$$

$$B_n = \frac{b^{-n}\beta_n^f - a^{-n}\beta_n^g}{a^n b^{-n} - a^{-n} b^n}, \quad B_{-n} = \frac{a^n \beta_n^g - b^n \beta_n^f}{a^n b^{-n} - a^{-n} b^n}. \tag{13.2}$$

Итак, формально получили решение краевой задачи (1)-(2) в виде ряда (6), коэффициенты которого определяются по формулам (12.1), (13.1), (13.2), зная коэффициенты Фурье заданных граничных функций.

Исследуем построенный ряд на сходимость в области Ω, предполагая, что граничные функции $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ непрерывны и 2π-периодичны. При этом существует такая константа $M > 0$, что

$$|f(\varphi)| \le M, \quad |\alpha_n^f| \le 2M, \quad |\beta_n^f| \le 2M, \quad \forall n;$$

$$|g(\varphi)| \le M, \quad |\alpha_n^g| \le 2M, \quad |\beta_n^g| \le 2M, \quad \forall n.$$

Построим для ряда (6) соответствующий мажорантный ряд:

$$|A_0||\ln r| + |B_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((|A_n| + |B_n|) r^n + (|A_{-n}| + |B_{-n}|) r^{-n} \right). \tag{$\star$}$$

Так как выражения (13.1) для коэффициентов A_n и A_{-n} можно преобразовать к виду:

$$A_n = \frac{1}{b^n} \cdot \frac{\alpha_n^f \left(\frac{a}{b}\right)^n - \alpha_n^g}{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} - 1}, \quad A_{-n} = a^n \cdot \frac{\alpha_n^g \left(\frac{a}{b}\right)^n - \alpha_n^f}{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} - 1},$$

то, учитывая, что $a < b$, будем иметь

$$|A_n| = \frac{1}{b^n} \left| \frac{\alpha_n^f \left(\frac{a}{b}\right)^n - \alpha_n^g}{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} - 1} \right| \leq \frac{2M}{b^n} \cdot \frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}} = \frac{2M}{b^n} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n} \leq \frac{2M}{b^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{b}},$$

$$|A_{-n}| = a^n \left| \frac{\alpha_n^g \left(\frac{a}{b}\right)^n - \alpha_n^f}{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} - 1} \right| \leq 2Ma^n \cdot \frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}} = \frac{2Ma^n}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n} \leq \frac{2Ma^n}{1 - \frac{a}{b}}.$$

Следовательно,

$$|A_n| \leq \frac{C}{b^n}, \quad |A_{-n}| \leq Ca^n, \quad \text{где} \quad C = \frac{2M}{1 - \frac{a}{b}}.$$

Аналогично можно получить

$$|B_n| \leq \frac{C}{b^n}, \quad |B_{-n}| < Ca^n.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (|A_n| + |B_n|) r^n \leq 2C \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (|A_{-n}| + |B_{-n}|) r^{-n} \leq 2C \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n,$$

то ряды

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (|A_n| + |B_n|) r^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (|A_{-n}| + |B_{-n}|) r^{-n}$$

сходятся в силу сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n,$$

определяющих суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий со знаменателями r/b и a/r (знаменатели меньше 1, так как $a <$

$r < b$). А, следовательно, сходится и мажорантный ряд ($\star$), а, значит, по признаку Вейерштрасса и ряд (6).

Можно показать, что ряд (6) при условии непрерывности и 2π-периодичности граничных функций определяет классическое решение задачи (1)-(2)

Задача Неймана. Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Лапласа в кольце:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, \quad a<r<b, \tag{14}$$

$$u_r(a,\varphi)=f(\varphi), \quad u_r(b,\varphi)=g(\varphi). \tag{15}$$

Воспользуемся полученным выше общим решением уравнения Лапласа в кольце (6), подчинив его граничным условиям (15). Так как

$$u_r(r,\varphi)=A_0 r+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\left(nA_n r^{n-1}-nA_{-n}r^{-n-1}\right)\cos n\varphi+$$
$$+\left(nB_n r^{n-1}-nB_{-n}r^{-n-1}\right)\sin n\varphi\Big),$$

то при $r=a$ и $r=b$ будем иметь:

$$u_r(a,\varphi)=A_0 a+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\left(nA_n a^{n-1}-nA_{-n}a^{-n-1}\right)\cos n\varphi+$$
$$+\left(nB_n a^{n-1}-nB_{-n}a^{-n-1}\right)\sin n\varphi\Big)=f(\varphi), \tag{16}$$

$$u_r(b,\varphi)=A_0 b+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\left(nA_n b^{n-1}-nA_{-n}b^{-n-1}\right)\cos n\varphi+$$
$$+\left(nB_n b^{n-1}-nB_{-n}b^{-n-1}\right)\sin n\varphi\Big)=g(\varphi). \tag{17}$$

Зная разложения функций $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ в ряды Фурье, сравнив их с рядами (16) и (17) соответственно, во-первых, получим два условия относительно одного коэффициента A_0:

$$\frac{A_0}{a}=\frac{\alpha_0^f}{2}, \quad \frac{A_0}{b}=\frac{\alpha_0^g}{2}.$$

Если не будет выполнено равенство

$$a\alpha_0^f-b\alpha_0^g=0, \tag{18}$$

то рассматриваемая задача Неймана не будет иметь решения. Предположим, что условие (18) выполнено, и тогда

$$A_0 = \frac{a\alpha_0^f}{2}. \tag{19}$$

Продолжая сравнение рядов Фурье и рядов (16), (17), получим

$$\begin{cases} n\left(A_n a^{n-1} - \dfrac{A_{-n}}{a^{n+1}}\right) = \alpha_n^f, \\ n\left(A_n b^{n-1} - \dfrac{A_{-n}}{b^{n+1}}\right) = \alpha_n^g; \end{cases} \qquad \begin{cases} n\left(B_n a^{n-1} - \dfrac{B_{-n}}{a^{n+1}}\right) = \beta_n^f, \\ n\left(B_n b^{n-1} - \dfrac{B_{-n}}{b^{n+1}}\right) = \beta_n^g; \end{cases} \tag{20}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Полученные системы однозначно определяют коэффициенты A_n, A_{-n}, B_n, B_{-n}, $n = 1, 2, \ldots$

Заметим, что коэффициент не может быть при заданных граничных условиях однозначно определен и остается поэтому произвольным.

Таким образом, получили, что *задача Неймана имеет решение, если выполнено условие (18), которое, учитывая определение коэффициентов Фурье α_0^f и α_0^g, можно записать в виде*

$$a\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi - b\int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0. \tag{21}$$

Условие (21) – это условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа в кольце.

Кроме того, если задача Неймана имеет решение, то оно определяется неоднозначно. Различные решения отличаются на постоянную величину.

Рекомендуемая литература

Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. – М.: Наука, 2004. – 416 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.