# Краевые задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой. Метод продолжения

Рассмотрим[1] следующую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \;\; x > 0, \; t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; x \geq 0, \tag{2}$$

$$\alpha\, u_x(0,t) + \beta\, u(0,t) = 0, \;\; t \geq 0, \tag{3}$$

где $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Область, в которой рассматривается уравнение (1), обозначим $\Omega_+ = \{(x,t) : x > 0, t > 0\}$.

Классическое решение задачи (1)-(3), непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}_+ = \{(x,t) : x \geq 0, t \geq 0\}$, может существовать, если выполняется условие согласования начального (2) и граничного (3) условий:

$$\alpha\, \varphi'(0) + \beta\, \varphi(0) = 0. \tag{5}$$

В основе метода решения краевой задачи (1)-(3) лежит следующая лемма.

**Лемма.** *Пусть функция $\Phi(x)$ определена, ограничена на прямой $(-\infty < x < +\infty)$ и имеет на ней ограниченную производную, а линейная комбинация $\alpha\, \Phi'(x) + \beta\, \Phi(x)$ является нечетной относительно точки $x = 0$. Тогда функция $u(x,t)$, определяемая интегралом Пуассона:*

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi, \tag{6}$$

*где*

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \tag{7}$$

*удовлетворяет условию:*

$$\alpha\, u_x(0,t) + \beta\, u(0,t) = 0.$$

Доказательство леммы см. в конспекте практического занятия № 7.

Очевидными следствиями леммы являются следующие:

[1] В тексте лекции изображение используется для указания на то, что утверждение должно быть доказано или проверено.

1. Если функция $\Phi(x)$ является нечетной, то функция $u(x,t)$, определяемая интегралом (6), удовлетворяет условию $u(0,t)=0$.

2. Если функция $\Phi(x)$ является четной, то функция $u(x,t)$, определяемая интегралом (6), удовлетворяет условию $u_x(0,t)=0$.

Лемма позволяет указать следующий способ решения задачи (1)-(3).

Продолжим функцию $\varphi(x)$, заданную при $x \geq 0$, на всю действительную ось $x$ , построив функцию $\Phi(x)$, которая удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \Phi(x) \equiv \varphi(x), \quad x \geq 0, \\ \alpha\,\Phi'(x) + \beta\,\Phi(x) = -(\alpha\,\Phi'(-x) + \beta\,\Phi(-x)), \quad x < 0, \end{cases} \tag{8}$$

и непрерывна вместе со своей производной на всей оси $x$. Второе условие в (8) соответствует условию нечетности функции $\alpha\,\Phi'(x) + \beta\,\Phi(x)$.

Теперь решим задачу Коши на прямой

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, \quad |x| < \infty,\ t > 0, \\ U(x,0) = \Phi(x). \end{cases} \tag{9}$$

Так как решение задачи Коши представимо в виде интеграла Пуассона, то, согласно лемме, функция $U(x,t)$ удовлетворяет граничному условию (3), и, следовательно, при $x \geq 0$ будем иметь $u(x,t) \equiv U(x,t)$.

Сформулированный способ построения краевой задачи (1)-(3) называется **методом продолжения**. Рассмотрим применение этого метода для решения трех краевых задач с различными видами граничных условий. Применительно к задачам с условием Дирихле ($\alpha = 0, \beta = 1$) и условием Неймана ($\alpha = 1, \beta = 0$) метод носит название соответственно **метода нечетного** и **четного продолжения**.

### Задача с граничным условием Дирихле ($\alpha = 0, \beta = 1$)

Условие (3) имеет вид

$$u(0,t) = 0. \tag{3$'$}$$

Так как необходимо построить классическое решение задачи, то предположим, что выполнено условие согласования начального и граничного условия, т. е. $\varphi(0) = 0$.

Введем функцию $\Phi(x)$, которая является нечетным продолжением функции $\varphi(x)$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \tag{10}$$

и рассмотрим задачу (9). Ее решение представляется интегралом Пуассона (6):

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi. \tag{6'}$$

Функция (6′), очевидно, удовлетворяет однородному уравнению (1) в $\Omega_+$, непрерывна и ограничена в замкнутой области $\overline{\Omega}_+$, удовлетворяет начальному условию (2) и в силу леммы однородному граничному условию Дирихле (3′). Тем самым (6′) является классическим решением задачи (1)-(3) с граничным условием Дирихле. Из формулы (6′) надо исключить функцию $\Phi(x)$, используя ее определение (10). Для рассматриваемой задачи будем иметь:

$$u(x,t) = U(x,y)\big|_{x\geq 0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi - \int_{-\infty}^{0} \varphi(-\xi)G(x,\xi,t)d\xi =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi + \int_{+\infty}^{0} \varphi(\eta)G(x,-\eta,t)d\eta =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)\left(G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t)\right)d\xi.$$

Окончательно решение задачи (1)-(3) с граничным условием Дирихле (3′) можно записать в виде:

$$u(x,t) = \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)G_1(x,\xi,t)d\xi, \tag{11}$$

где

$$G_1(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}}\right). \tag{12}$$

Функция $G_1(x,\xi,t)$ называется *функций Грина задачи Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой.*

**Замечание.** Функция $u(x,t)$, определяемая интегралом (11), удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в $\Omega_+$ и ограничена в $\overline{\Omega}_+$ и в случае ограниченной кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$. При этом она непрерывно примыкает при $t \to 0$ к функции $\varphi(x)$ в точках ее непрерывности. Очевидно, это имеет место и в случае несогласования начального и граничного условий, т. е. когда $\varphi(0) \neq 0$. При этом граничное условие $u(0,t) = 0$ выполняется только при $t > 0$.

**Физический смысл функции Грина** $G_1(x, \xi, t)$ следует из формулы (12). *Функция* $G_1(x, \xi, t)$ *описывает температурное распределение на полупрямой, вызванное действием источника, который в начальный момент* $t = 0$ *в точке* $x = \xi$ *мгновенно выделяется количество тепла* $Q = c\rho$. *При этом граничное сечение* $x = 0$ *все время поддерживается при нулевой температуре, для чего в точку* $x = -\xi$ *нужно поместить мгновенный точечный источник отрицательно мощности* $-Q$. Заметим, что условие $u(0,t) = 0$ физически соответствует полному поглощению тепла на конце $x = 0$.

Температурное распределение на полупрямой, описываемое функций Грина $G_1(x, \xi, t)$.

С помощью функции Грина $G_1(x, \xi, t)$ можно построить решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой с однородными начальным и граничным условиями:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ x \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_1(x,\xi,t-\tau) d\xi \, d\tau.$$

### Задача с граничным условием Неймана ($\alpha = 1, \beta = 0$)

Условие (3) имеет вид

$$u_x(0,t) = 0. \tag{3$''$}$$

Задачу с условием Неймана будем решать методом четного продолжения, введя функцию которая является четным продолжением функции $\varphi(x)$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \tag{13}$$

Далее снова рассмотрим задачу (9). Ее решение представляется интегралом Пуассона ($6'$). Функция ($6'$), очевидно, удовлетворяет однородному уравнению (1) в $\Omega_+$, непрерывна и ограничена в замкнутой области $\overline{\Omega}_+$ , удовлетворяет начальному условию (2) и в силу леммы однородному граничному условию Неймана ($3''$). Тем самым функция ($6'$) является классическим решением задачи (1)-(3) с граничным условием Неймана. Из формулы ($6'$) надо исключить функцию $\Phi(x)$, используя ее определение (13). Для рассматриваемой задачи будем иметь:

$$u(x,t) = U(x,y)|_{x\geq 0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) G(x,\xi,t) d\xi =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\xi) \left( G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t) \right) d\xi.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи (1)-(3) с граничным условием Неймана ($3''$) можно записать в виде:

$$u(x,t) = \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\xi) G_2(x,\xi,t) d\xi, \tag{14}$$

где

$$G_2(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right). \tag{15}$$

Функция $G_2(x,\xi,t)$ называется *функций Грина задачи Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой.*

**Замечание.** В случае непрерывной при $x \geq 0$ функции $\varphi(x)$ и выполнении условия согласования начального и граничного условий $\varphi'(x) = 0$ формула (14) определяет классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3) с граничным условием Неймана ($3''$). Если же эти условия не выполняются, то функция (14) удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в $\Omega_+$, ограничена в $\overline{\Omega}_+$ и непрерывно примыкает при $t \to 0$ к функции $\varphi(x)$ только в точках ее непрерывности. Если условие согласования не выполнено, то граничное условие $u_x(0,t) = 0$ выполняется только при $t > 0$.

**Физический смысл функции Грина** $G_2(x,\xi,t)$ следует из формулы (15). *Функция $G_2(x,\xi,t)$ описывает температурное распределение на полупрямой, вызванное действием источника, который в начальный момент $t = 0$ в точке $x = \xi$ мгновенно выделяется количество тепла*

$Q = c\rho$. *При этом поток тепла через сечение* $x = 0$ *все время равен нулю, для чего в точку* $x = \xi$ *нужно поместить мгновенный точечный источник положительной мощности* $Q$. Условие $u_x(0,t) = 0$ физически соответствует полному отражению тепла от границы $x = 0$ (конец теплоизолирован).

Температурное распределение на полупрямой, описываемое функций Грина $G_2(x, \xi, t)$.

С помощью функции Грина $G_2(x, \xi, t)$ можно построить решение задачи Неймана для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой с однородными начальным и граничным условиями:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x > 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ x \geq 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_2(x,\xi,t-\tau) d\xi \, d\tau.$$

**Задача с граничным условием 3-го рода** $(\alpha = 1, \beta = -h, \ h > 0)$

Условие (3) имеет вид

$$u_x(0,t) - h\, u(0,t) = 0, \quad h = const > 0, \quad t \geq 0. \qquad (3''')$$

Решим задачу методом продолжения. Прежде всего необходимо построить функцию $\Phi(x)$, продолжив функцию $\varphi(x)$ на отрицательную полуось так, чтобы функция $\Phi'(x) - h\,\Phi(x)$, рассматриваемая на всей числовой прямой, была бы нечетной, т. е. для любых $x \in \mathbf{R}^1$ выполнялось бы равенство:

$$\Phi'(x) - h\,\Phi(x) = -(\Phi'(-x) - h\,\Phi(-x)). \qquad (16)$$

Очевидно, $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ при $x \geq 0$. Для определения функции $\Phi(x)$ при отрицательных значениях аргумента, рассматривая равенство (16) при $x < 0$, получим задачу Коши

$$\begin{cases} \Phi'(x) - h\,\Phi(x) = f(x), \quad x < 0, \\ \Phi(0) = \varphi(0), \end{cases} \qquad (17)$$

где $f(x) = -(\varphi(-x) - h\varphi(-x))$.

Решение задачи (17) имеет вид:

$$\Phi(x) = \varphi(-x) + 2h\int\limits_0^x e^{h(x-z)}\varphi(-z)dz, \quad x \le 0.$$

Таким образом, функция $\Phi(x)$, удовлетворяющая требуемому условию, определена:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \ge 0, \\ \varphi(-x) + 2h\int\limits_0^x e^{h(x-z)}\varphi(-z)dz & x < 0. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, решение задачи Коши (9), определяемое интегралом Пуассона

$$U(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi,$$

удовлетворяет условиям задачи (1)-(3) (граничное условие задачи ($3'''$) выполняется для $U(x,t)$ по по лемме). Следовательно, рассматривая его при $x \ge 0$, получим решение задачи (1)-(3) в виде:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi. \tag{19}$$

Преобразуем интеграл (19), используя определение (18) для функции $\Phi(x)$:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi + \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(-\xi)G(x,\xi,t)d\xi +$$

$$+2h\int\limits_{-\infty}^{0} G(x,\xi,t)\int\limits_0^{\xi} \varphi(-z)e^{h(\xi-z)}dzd\xi =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \varphi(\xi)(G(x,\xi,t) + G(x,-\xi,t))d\xi + 2hI,$$

где

$$I = \int\limits_{-\infty}^{0} G(x,\xi,t)\int\limits_0^{\xi} \varphi(-z)e^{h(\xi-z)}dzd\xi.$$

Для интеграла $I$ справедлива следующая цепочка преобразований:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{0}G(x,\xi,t)\int\limits_{0}^{\xi}\varphi(-z)e^{h(\xi-z)}dzd\xi=\left[\begin{array}{c}\textit{замена:}\\ y=-z\end{array}\right]=$$

$$=-\int\limits_{-\infty}^{0}G(x,\xi,t)\int\limits_{0}^{-\xi}\varphi(y)e^{h(\xi+y)}dyd\xi=\left[\begin{array}{c}\textit{замена:}\\ \eta=-\xi\end{array}\right]=$$

$$=-\int\limits_{0}^{+\infty}G(x,-\eta,t)\int\limits_{0}^{\eta}\varphi(y)e^{h(-\eta+y)}dyd\eta.$$

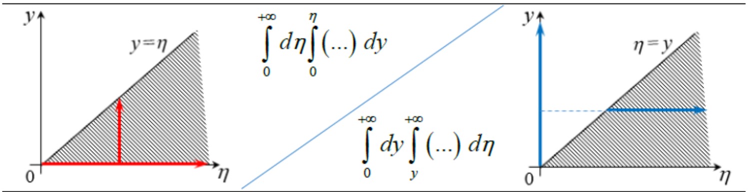


Рис. 1

Изменив порядок интегрирования (рис. 1), получим

$$I=-\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(y)\int\limits_{y}^{+\infty}G(x,-\eta,t)e^{h(-\eta+y)}d\eta dy=$$

$$=-\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(y)\int\limits_{-\infty}^{-y}G(x,\eta,t)e^{h(\eta+y)}d\eta dy.$$

Заменив переменную интегрирования $y$ на $\xi$, окончательно будем иметь

$$I=-\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\xi)\int\limits_{-\infty}^{-\xi}G(x,\eta,t)e^{h(\xi+\eta)}d\eta d\xi.$$

В результате выражение для $u(x,t)$ принимает вид:

$$u(x,t)=\int\limits_{0}^{+\infty}(\xi)\left(G(x,\xi,t)+G(x,-\xi,t)-2h\int\limits_{-\infty}^{-\xi}G(x,\eta,t)e^{h(\xi+\eta)}d\eta\right)d\xi.$$

Функцией Грина для рассматриваемой задачи является:

$$G_3(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)+G(x,-\xi,t)-2h\int\limits_{-\infty}^{-\xi}G(x,\eta,t)e^{h(\xi+\eta)}d\eta.$$

Решение задачи (1)-(3) можно записать с помощью функции Грина:

$$u(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(\xi) G_3(x,\xi,t) d\xi.$$

**Физический смысл функции Грина** $G_3(x,\xi,t)$: *функция описывает температурное распределение на полупрямой, вызванное действием мгновенного точечного источника, который находится в точке* $x = \xi$ *и в начальный момент времени* $t = 0$ *выделяет количество тепла* $Q = c\rho$. *Для удовлетворения граничного условия 3-го рода нужно поместить в точку* $x = -\xi$ *симметричный источник мощности* $Q = c\rho$ *и добавить непрерывно распределенные источники левее точки* $x = -\xi$, *мощность которых экспоненциально стремится к 0 при* $\eta \to -\infty$.

С помощью функции Грина $G_3(x,\xi,t)$ можно построить решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой с однородными начальным и граничным условиями:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \;\; x > 0, \; t > 0, \\ u(x,0) = 0, \; x \geq 0, \\ u_x(0,t) - h\, u(0,t) = 0, \;\; t \geq 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} f(\xi,\tau) G_3(x,\xi,t-\tau) d\xi \, d\tau.$$

## Рекомендуемая литература

Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. – М.: Наука, 2004. – 416 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.