Свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности на прямой

Функцию $G(x, \xi, t)$, определяемую формулой

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \tag{1}$$

называют *фундаментальным решением* (или *функцией Грина*) уравнения теплопроводности в одномерном случае (на прямой).

Формальное решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R^1}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R^1}, \end{cases} \tag{2}$$

представляется формулой

$$u(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) \, d\xi. \tag{3}$$

Представление решения задачи Коши в виде интеграла (3) обычно называют *интегралом Пуассона.*

Рассмотрим[1] некоторые свойства фундаментального решения (1).

1. Из формулы (1) следует, что:

   1) функция $G(x, \xi, t)$ определена при $t > 0$ и положительна;

   2) $G(x, \xi, t) = G(\xi, x, t)$.

2. $G(x, \xi, t),\ G_x(x, \xi, t) \to 0$ при $|x| \to +\infty$;
   $G(x, \xi, t),\ G_\xi(x, \xi, t) \to 0$ при $|\xi| \to +\infty$.

3. $\dfrac{\partial^k G}{\partial x^k} = (-1)^k \dfrac{\partial^k G}{\partial \xi^k}$.

---

[1] Свойства, отмеченные изображением , докажите самостоятельно.

4. Непосредственной проверкой легко установить, что функция $G(x,\xi,t)$ по переменным x и t удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности при $t>0$:

$$G_t(x,\xi,t)=a^2G_{xx}(x,\xi,t),\quad (x,y)\in\Omega,\quad \xi\in\mathbf{R^1}.$$

где $\Omega=\{(x,t)|\; x\in\mathbf{R^1}, t>0\}$.

5. Проинтегрировав функцию $G(x,\xi,t)$ по x от $-\infty$ до $+\infty$, используя замену $z=\dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\,d\xi=1. \tag{4}$$

Выясним, какой физический смысл имеет функция $G(x,\xi,t)$. Пусть в начальный момент времени $t=0$ все тепло сосредоточено в малой окрестности точки x_0, так что начальная температура $\varphi(x)$ равна:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_\varepsilon(x), & |x-x_0|\le\varepsilon,\\ 0, & |x-x_0|>\varepsilon,\end{cases}$$

где функция $\varphi_\varepsilon(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon]$. При этом общее количество тепла, сообщаемое участку $[x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon]$ в начальный момент, будет равно

$$Q=c\rho\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi. \tag{5}$$

Тогда решение задачи Коши (2) определяется формулой (3), которая в нашем случае принимает вид:

$$u_\varepsilon(x,t)=\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}G(x,\xi,t)\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi.$$

Применив к интегралу теорему о среднем, будем иметь

$$u_\varepsilon(x,t)=G(x,\tilde{\xi},t)\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi,$$

где $\tilde{\xi} \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$. Учитывая формулу (5), получим

$$u_\varepsilon(x,t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \tilde{\xi}, t). \tag{6}$$

Считая $Q = c\rho$ и переходя к пределу в (6) при $\varepsilon \to 0$ найдем

$$u(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x,t) = G(x, x_0, t). \tag{7}$$

Итак, предельное температурное распределение совпадает с фундаментальным решением.

Уменьшая ε до нуля, т.е. считая, что то же количество тепла Q распределяется на все меньшем участке и в пределе сообщается в точке $x = x_0$, приходим к понятию мгновенного точечного источника тепла мощности Q, помещенного в точке $x = x_0$ в начальный момент времени $t = 0$. От действия такого источника тепла мощности $Q = c\rho$ получается температурное распределение (7).

Таким образом, *фундаментальное решение $G(x, x_0, t)$ описывает температурное распределение на прямой в результате действия в момент времени $t = 0$ точечного источника тепла мощности $Q = c\rho$, помещенного в точке x_0.* В этом заключается физический смысл фундаментального решения.

Теперь можно отметить. какой физический смысл имеет равенство (4). Он заключается в том, что количество тепла, находящееся на бесконечной прямой $x \in \mathbf{R}^1$ не изменяется с течением времени.

На рис. 1 приведены примерные графики функции $G(x, x_0, t)$ как функции x в различные моменты времени $t_3 > t_2 > t_1 > 0$. Графики обладают симметрией относительно прямой $x = x_0$.

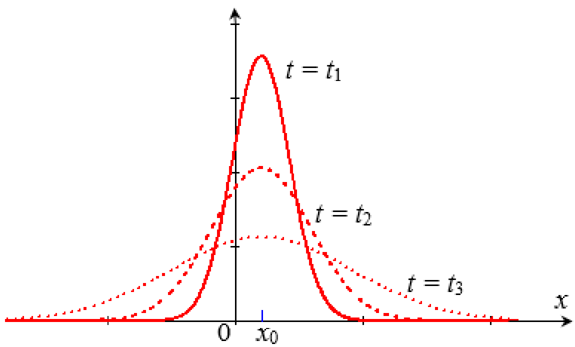

Рис. 1

Замечание. Из вида функции $G(x, x_0, t)$ следует, что температура точки бесконечной прямой, сколь угодно далеко расположенной от точки x_0, где находится источник, и в моменты времени, сколь угодно близкие к начальному моменту $t = 0$, отлична от нуля. Это явление противоречит конечной скорости распространения тепла и носит название *парадокса бесконечной теплопроводности*. Указанный парадокс связан с недостаточной полнотой физической модели, применяемой при выводе уравнения теплопроводности.

Рекомендуемая литература

1. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.

2. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. – Москва: Наука, 2004. – 416 с.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 2004. – 798 с.