Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой

Замечание 1. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in R^1, \quad t > t_0, \\ u(x, t_0) = \varphi(x), \quad x \in R^1, \end{cases}$$

представимо в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t - t_0)\, d\xi$$

§ 4. Неоднородное уравнение теплопроводности на прямой

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, y), \quad x \in R^1, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in R^1, \tag{2}$$

где функция $f(x,t)$ является непрерывной и ограниченной в области $\overline{\Omega} = \{(x,t) |\ x \in R^1, t \geq 0\}$. Пусть функция $v(x,t,\tau)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \quad x \in R^1, \quad t > \tau, \\ v(x, \tau, \tau) = f(x, \tau), \quad x \in R^1. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь τ является параметром ($\tau \geq 0$) и определяет начальный момент времени. В соответствии с замечанием 1 решение задачи (3) представимо в виде

$$v(x,t,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau)\, d\xi. \tag{4}$$

Покажем, что интеграл

$$u(x,t) = \int\limits_{0}^{t} v(x,t,\tau)\, d\tau \tag{5}$$

является решением задачи (1)–(2).

Так как $u(x,0) \overset{(5)}{=} 0$, то начальное условие (2) выполнено. Найдем производные, используя правило дифференцирования интеграла, зависящего от параметра (для интеграла (5) параметрами будут переменные t и x),

$$u_t = \int\limits_0^t v_t d\tau + v(x,t,t) = \int\limits_0^t v_t d\tau + f(x,t),$$
$$u_{xx} = \int\limits_0^t v_{xx}\, d\tau.$$

Дифференцирование интеграла законно на основании свойств решения задачи Коши (3). Составим разность

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int\limits_0^t (\underbrace{v_t - a^2 v_{xx}}_{\overset{(3)}{=}0})\, d\tau + f(x,t) = f(x,t).$$

В результате получим, что интеграл (5) удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом, решение задачи (1)–(2) можно представить в виде

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{6}$$

В силу линейности краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,y), \quad x \in R^1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R^1, \end{cases} \tag{7}$$

ее решение является суперпозицией решений двух задач – задачи для однородного уравнения с неоднородным начальным условием и задачи для неоднородного уравнения с однородным начальным условием:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau.$$

§ 5. Свойства решений задачи Коши

Теорема 1. (Единственность решения задачи Коши.) *Задача (7) имеет только одно классическое решение, ограниченное в области* $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – два классических ограниченных решения задачи (7). Функции u_1 и u_2 непрерывны и ограничены в области $\overline{\Omega}$, т.е. $|u_k| \leq M, \quad k = 1, 2$, Рассмотрим функцию $v(x,t)$, равную разности этих функций:

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Функция $v(x,t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}$, ограничена $|v(x,t)| \leq 2M$, удовлетворяет в области $\Omega = \{(x,t)|\ x \in R^1, t > 0\}$ однородному уравнению теплопроводности

$$v_t = a^2 v_{xx}$$

и однородному начальному условию

$$v(x,0) = 0.$$

Однако применить к функции $v(x,t)$ принцип максимума, как это было ранее сделано при доказательстве единственности классического решения уравнения теплопроводности на отрезке, нельзя, так как в неограниченной по x области функция $v(x,t)$ может нигде не принимать максимального значения.

Рассмотрим ограниченную по x область

$$|x| \leq L,$$

где $L > 0$ – вспомогательно число, которое будем затем неограниченно увеличивать. Обозначим

$$\overline{\Omega}_L = [-L, L] \times [0, T], \quad \Omega_L = [-L, L] \times (0, T].$$

Введем вспомогательную функцию (ее обычно называют барьером)

$$w(x,t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right).$$

Функция $w(x,t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}_L$ и удовлетворяет в области Ω_L однородному уравнению теплопроводности (что можно проверить, подставив функцию в уравнение). Кроме того, для функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$ справедливы следующие неравенств:

$$w(x,0) \geq |v(x,0)| = 0, \tag{8}$$

$$w(\pm L,t) \geq 2M \geq |v(\pm L,t)|. \tag{9}$$

В ограниченной области $\overline{\Omega}_L$ уже применим принцип максимума. Применяя следствие принципа максимума (принцип сравнения) к функциям $-w(x,t)$, $v(x,t)$ и к функциям $w(x,t)$, $v(x,t)$, с учетом (8) и (9) получим

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right) \leq v(x,t) \leq \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right). \tag{10}$$

Зафиксируем точку $(x,y) \in \overline{\Omega}_L$ и перейдем в неравенстве (10) к пределу при $L \to +\infty$. Тогда по теореме о предельном переходе в неравенстве получим

$$\lim_{L\to+\infty} v(x,t) = 0.$$

Отсюда в силу независимости функции $v(x,t)$ от L и в силу произвольности точки (x,y) получаем, что всюду в области $\overline{\Omega}$ функция $v(x,t) \equiv 0$. Поэтому всюду в области $\overline{\Omega}$ имеем $u_1 \equiv u_2$, т. е. решение единственно.

Теорема 2. (Теорема устойчивости.) *Если непрерывная функция $\varphi(x)$ и кусочно-непрерывная функция $\overline{\varphi}(x)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \overline{\varphi}(x)|^2 dx \leq \varepsilon,$$

то для классического решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi$$

и функции

$$\overline{u}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi$$

при $x \in R^1, t \geq t_0 > 0$ *справедлива оценка*

$$|u(x,t) - \overline{u}(x,t)| \leq C t_0^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\varepsilon},$$

где постоянная C *не зависит ни от* x*, ни от* t*, ни от* t_0*.*

Доказательство. Очевидно,

$$|u(x,t) - \overline{u}(x,t)| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(\xi) - \overline{\varphi}(\xi)) G(x,\xi,t)\, d\xi \right| \leq \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi) - \overline{\varphi}(\xi)|\, d\xi.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi) - \overline{\varphi}(\xi)|\, d\xi \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2a^2 t}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi) - \overline{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сделав стандартную замену $z = \dfrac{\xi - x}{a\sqrt{2t}}$, для первого интеграла в правой части последнего неравенства получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2a^2 t}} d\xi = a\sqrt{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = a\sqrt{2\pi t},$$

что и дает требуемую оценку при $t \leq t_0 > 0:$

$$|u(x,t) - \overline{u}(x,t)| \leq C t_0^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\varepsilon},$$

где $C = \left(2^{\frac{3}{4}} \pi^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}$.

Теорема 3. (Теорема устойчивости по правой части уравнения.) *Задача (1)-(2) для уравнения теплопроводности на прямой устойчива по правой части на конечном промежутке времени, т. е. для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$*, что если*

$$|f_1(x,t) - f_2(x,t)| \leq \delta, \quad x \in R^1, \quad t \in [0, T],$$

то

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon, \quad x \in R^1, \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. Рассмотрим задачу (1)-(2) для неоднородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием. Обозначим через $u_k(x,t)$ решение этой задачи, соответствующее правой части $f_k(x,t)$, где $k = 1,2$. Предположим, что при $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$|f_1(x,t) - f_2(x,t)| \le \delta, \quad x \in R^1, \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Записывая решения u_1 и u_2 с помощью формулы (6) с соответствующей функцией f_k и учитывая (11), получим

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)|f_1(\xi,\tau) - f_2(\xi,\tau)|\, d\xi\, d\tau \le$$

$$\le \delta \int\limits_0^t \tau \le \delta T. \tag{12}$$

Из неравенств (11) и (12) вытекает, что малому изменению правых частей соответствует малое изменение решений, что и означает устойчивость решения задачи (1)-(2).

Сформулируйте и докажите свойство устойчивости решения задачи (7) относительно начальных данных.

Рекомендуемая литература

Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. – М.: Наука, 2004. – 416 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.