Свойства краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ и уравнение Пуассона $\Delta u = F(M)$, являются уравнениями эллиптического типа. К таким уравнениям приводят задачи, связанные с описанием различных физических процессов. Например, задачи о стационарных тепловых состояниях однородных тел, об установившихся диффузионных процессах, о потенциале поля тяготения и др. В каждой задаче, связанной с этими уравнениями, искомое решение (функция $u = u(M)$) должно удовлетворять уравнению в области D, а также некоторому дополнительному условию на границе S области D.

Выделяют следующие основные виды граничных условий:

1) граничное условие 1-го рода (условие Дирихле)

$$u\big|_S = f(P),\ P \in S;$$

2) граничное условие 2-го рода (условие Неймана)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P),\ P \in S;$$

3) граничное условие 3-го рода

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h\,u\right)\right|_S = f(P),\ P \in S.$$

Здесь $f(P)$ – определенная на поверхности S функция (граничная функция); $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S; $h \neq 0$. В дальнейшем будем считать, что функция $f(P)$ является непрерывной на S функцией.

В зависимости от вида граничного условия различают следующие граничные задачи: первая краевая задача, вторая краевая задача и третья краевая задача. Если решение надо найти в области D, внутренней (внешней) по отношению к поверхности S, то соответствующую задачу называют внутренней (внешней) краевой задачей.

Первую краевую задачу для уравнения Лапласа (уравнения Пуассона) называют **задачей Дирихле**, вторую – **задачей Неймана**.

1. Внутренняя задача Дирихле

Пусть дана область D, ограниченная замкнутой поверхностью S, на которой задана непрерывная функция $f(P)$. А в области D задана непрерывная функция $F(M)$. Сформулируем внутреннюю задачу Дирихле.

Найти такую функцию $u(M)$, которая непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup S$, удовлетворяет в области D уравнению

$$\Delta u = F(M), \quad M \in D \tag{1}$$

и принимает на поверхности S заданные значения $f(P)$:

$$u|_S = f(P), \; P \in S. \tag{2}$$

Определение. Классическим решением внутренней задачи Дирихле называется функция $u(M)$, непрерывная в замкнутой области $\overline{D} = D \cup S$, имеющая непрерывные вторые производные в D, удовлетворяющая уравнению (1) в области D и непрерывно примыкающая к заданным граничным значениям $f(P)$.

Заметим, что требование непрерывности $u(M)$ в замкнутой области $\overline{D}$ и непрерывное примыкание к граничным значениям $f(P)$ существенны для единственности классического решения. Действительно, если это требование опустить, то решением задачи

$$\Delta u = 0 \text{ в } D, \quad u|_S = f$$

является любая функция, равная постоянной в области D и заданной функции f на границе S. Этот пример показывает, что без условия непрерывности в замкнутой области решение неединственно.

Теорема 1. (теорема единственности внутренней задачи Дирихле) *Задача Дирихле (1)-(2) не может иметь более одного классического решения.*

Доказательство. Пусть существуют два классических решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ задачи Дирихле (1)-(2). Построим функцию $v(M) = u_1 - u_2$. Функция $v(M)$, очевидно, гармоническая в D, непрерывная в $\overline{D}$ и удовлетворяет однородному граничному условию $v|_S = 0$. В силу следствия 1 к принципу максимума[1] будем иметь $v(M) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Следовательно, получаем $u_1(M) \equiv u_2(M)$ в $\overline{D}$.

Теорема 2. (теорема устойчивости) *Решение внутренней задачи Дирихле устойчиво в равномерной норме по граничным условиям (непрерывно зависит от граничных данных).*

Доказательство. Пусть $u_i(M), \; i = 1, 2$, есть классическое решение задачи

$$\Delta u_i = F(M), \; M \in D, \quad u_i|_S = f_i(P), \; P \in S,$$

[1] См. лекцию «Свойства гармонических функций».

причем $|f_1(P) - f_2(P)| \le \varepsilon$ всюду на S (граничные значения отличаются на малую величину). Рассмотрим функцию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Она является гармонической и для нее всюду на S справедливо неравенство $-\varepsilon \le v(P) \le \varepsilon$. Тогда в силу принципа сравнения для гармонических функций это неравенство справедливо всюду в D. Следовательно, всюду в области $\overline{D}$ имеет место $|u_1 - u_2| \le \varepsilon$. Показали, что малому изменению граничных условий (2) отвечает малое изменение самого решения.

Замечание. Доказанное свойство непрерывной зависимости решения задачи Дирихле от граничных условий очень важно при решении физических задач, так как небольшие изменения в граничных условиях могут внести только небольшие изменения в решение задачи.

2. Внутренние вторая и третья краевая задача

При рассмотрении второй и третьей краевых задач будем использовать следующее определение классического решения.

Определение. Классическим решение второй и третьей краевых задач называется функция $u(M)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутой области $\overline{D} = D \cup S$, имеющая непрерывные вторые производные в D, удовлетворяющая уравнению (1) в области D и заданному граничному условию на поверхности S.

Теорема 3. *Пусть $h(P) \ge 0$ на S, причем $h \not\equiv 0$. Третья краевая задача*

$$\Delta u = F(M), \quad M \in D, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\bigg|_S = f(P), \ P \in S, \tag{3}$$

где $\vec{n}$ – внешняя по отношению к D нормаль к поверхности S, не может иметь более одного классического решения.

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно показать, что однородная задача

$$\Delta u = 0, \quad M \in D, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\bigg|_S = 0, \ P \in S, \tag{4}$$

имеет только нулевое решение.

Используя первую формулу Грина, считая $v \equiv u$, будем иметь

$$\int\limits_D u\,\Delta u\,d\sigma = \int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int\limits_D (\nabla u)^2\,d\sigma.$$

Так как $\Delta u = 0$ в D, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = -h\, u|_S$, то получим

$$\int\limits_S hu^2 ds + \int\limits_D (\nabla u)^2\, d\sigma = 0.$$

Следовательно, $\nabla u = \operatorname{grad} \mathrm{u} = 0$ в D, $u|_S = 0$ в тех точках поверхности S, где $h \neq 0$. Отсюда находим $u(M) = const = 0$. Следовательно, однородная задача (4) имеет только нулевое решение.

Замечание. Условие $h \geq 0$, $h \not\equiv 0$ существенно для единственности решения третьей краевой задачи. Если $h < 0$ на S, то решение может быть не единственным. В этом можно убедится на примере. Действительно, функция $u(r, \varphi) = r \cos\varphi$ является ненулевым решением уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \leq r < a$, удовлетворяющим однородному граничному условию

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a}\, u\right)\right|_{r=a} = 0 \quad \left(h = -\frac{1}{a}\right).$$

Следовательно, решение краевой задачи в круге

$$\Delta u = 0,\ 0 \leq r < a, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a}\, u\right)\right|_{r=a} = 0$$

неединственно, так как $u \equiv 0$ также является решением этой задачи.

Если рассматривать вторую краевую задачу, т.е. когда $h \equiv 0$, то получим $\operatorname{grad} \mathrm{u} = 0$, откуда $u(M) = const$. Это означает, что классическое решение второй внутренней краевой задачи (внутренней задачи Неймана) неединственно и определяется с точностью до производной постоянной. Для второй краевой задачи для уравнения Лапласа также получаем, что если она имеет решение, то согласно свойству 2 гармонической функции[2] должно выполняться соотношение

$$\int\limits_S f(P) ds = 0, \tag{5}$$

где $f(P) = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S$. Если условие (5) не выполнено, то задача Неймана для уравнения Лапласа решения не имеет. Следовательно, условие (5)

[2] См. лекцию «Свойства гармонических функций».

является необходимым условием разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Можно доказать, что это условия также и достаточным условием разрешимости задачи Неймана[3].

Рекомендуемая литература

Ефимов А. В. и др. Математический анализ (специальные разделы). Ч. II. Применение некоторых методов математического и функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1980. – 295 с.

Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. – М.: Наука, 2004. – 416 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.

[3] Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. – М.: Наука, 2004. С. 227.