Свойства гармонических функций

Пусть область $D \subset R^n$ ограничена замкнутой гладкой поверхностью S (кривой в случае $n = 2$). Пусть в области $\overline{D} = D \cup S$ рассматривается гармоническая функция $u = u(M)$, для которой имеем:

$$u \in C^2(D), \quad \Delta u = 0 \ \ \forall M \in D.$$

Рассмотрим некоторые свойства гармонических функций, для доказательства которых будем использовать формулы Грина.

1. Интегральное представление гармонической функции. Для любой внутренней точки $M_0 \in D$ имеет место следующее интегральное представление:

$$u(M_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int\limits_S \left(\dfrac{1}{r} \dfrac{du}{dn} - u \dfrac{d}{dn} \left(\dfrac{1}{r} \right) \right) ds, & D \subset R^3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_S \left(\ln \dfrac{1}{r} \dfrac{du}{dn} - u \dfrac{d}{dn} \left(\ln \dfrac{1}{r} \right) \right) ds, & D \subset R^2. \end{cases} \qquad (1)$$

где r – расстояние между фиксированной точкой $M_0 \in D$ и произвольной точкой $M \in \overline{D}$. Производная $\frac{d}{dn}$ берется по направлению внешней нормали n (внешней по отношению к области D) в точках поверхности (кривой) S .

Формулы (1) следуют из формулы Грина

$$u(M_0) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left(\int\limits_S \left(\frac{1}{r} \frac{du}{dn} - u \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) \right) ds - \int\limits_D \frac{1}{r} \Delta u \, d\sigma \right), & D \subset R^3, \\ \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_S \left(\ln \frac{1}{r} \frac{du}{dn} - u \frac{d}{dn} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) ds - \int\limits_D \ln \frac{1}{r} \Delta u \, d\sigma \right), & D \subset R^3. \end{cases}$$

учитывая, что гармоническая функция в области D удовлетворяет уравнению Лапласа.

2. *Если u – гармоническая в области D функция, то*

$$\int\limits_\Sigma \frac{du}{dn} \, ds = 0, \qquad (2)$$

где Σ – любая гладкая замкнутая поверхность ($D \subset R^3$), кривая ($D \subset R^3$), целиком лежащая в области D (области гармоничности

функции u).
Действительно, используя вторую формулу Грина (в которой D_Σ – область, ограниченная поверхностью (кривой) Σ)

$$\int\limits_{D_\Sigma} (v\Delta u - u\Delta v)\, d\sigma = \int\limits_{\Sigma} \left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn} \right) ds, \tag{3}$$

и полагая $v \equiv 1$, получим формулу (2) (так как $\Delta u = 0, \Delta v \equiv 0,\ \frac{dv}{dn} \equiv 0$.)

Заметим, что если поверхность (кривая) Σ имеет общую часть с границей области D или совпадает с ней, то для справедливости формулы (2) нужно, чтобы $u(M) \in C^1(\overline{D})$.

Формуле (2) можно дать следующую физическую интерпретацию: *суммарный тепловой поток через поверхность Σ равен нулю.*

3. Теорема о среднем. *Пусть $u(M)$ – гармоническая в области D функция. Тогда*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{\Sigma^a_{M_0}} u(M)\, ds, \tag{4}$$

где $\Sigma^a_{M_0}$ – сфера с центром в точке M_0 радиуса a, целиком лежащая в области D.

Доказательство. Применим формулу (1) к шару $D^a_{M_0}$ с центром в точке M_0 и поверхностью $\Sigma^a_{M_0}$:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Sigma^a_{M_0}} \left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) \right) ds.$$

Так как на сфере $\Sigma^a_{M_0}$:

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{\Sigma^a_{M_0}} = \frac{1}{a}, \quad \left.\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{\Sigma^a_{M_0}} = \left.\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{\Sigma^a_{M_0}} = -\frac{1}{a^2},$$

то учитывая свойство 2, получим

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a} \int\limits_{\Sigma^a_{M_0}} \frac{du}{dn}\, ds + \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{\Sigma^a_{M_0}} u\, ds = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{\Sigma^a_{M_0}} u\, ds,$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема утверждает, что значение гармонической функции в точке M_0 равно среднему значению этой функции на любой сфере $\Sigma^a_{M_0}$ с центром в точке M_0, если сфера $\Sigma^a_{M_0}$ не выходит из области гармоничности функции u.

Заметим, что для гармонической функции, непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$, формула среднего значения справедлива и тогда, когда сфера касается границы области D.

Для случая, когда область гармоничности D функции $u(M)$ является частью плоскости, имеет место аналогичная теорема о среднем значении:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{C^a_{M_0}} u(M)\, dl, \tag{5}$$

где $C^a_{M_0}$ – окружность с центром в точке M_0 радиуса a, целиком лежащая в области D.

4. Принцип максимума. *Гармоническая в области D функция $u(M)$, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, достигает своих максимальных и минимальных значений на границе S области D.*

Доказательство. Так как функция $u(M)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то она достигает своего максимального значения в этой области. Докажем, что это максимальное значение достигается функцией $u(M)$ на поверхности S. Предположим противное. Пусть функция $u(M)$ достигает своего максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области D:

$$u_0 = \max_{\overline{D}} u(M) = u(M_0) \geq u(M),$$

где M – любая точка области $\overline{D}$. Окружим точку M_0 сферой $\Sigma^\rho_{M_0}$ радиуса ρ, целиком лежащей в области D, и применим теорему о среднем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int\limits_{\Sigma^\rho_{M_0}} u(P)\, ds \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \int\limits_{\Sigma^\rho_{M_0}} u(M_0)\, ds = \frac{u(M_0)}{4\pi\rho^2} \int\limits_{\Sigma^\rho_{M_0}} ds = u(M_0).$$

Написанная цепочка соотношений верна только в том случае, если

$$u(P)|_{\Sigma^\rho_{M_0}} \equiv u(M_0).$$

Действительно, так как крайние элементы цепочки равны, то

$$\int\limits_{\Sigma^{\rho}_{M_0}} u(P)\,ds = 4\pi\rho^2 u(M_0).$$

Если теперь предположить, что хотя бы в одной точке P_0 сферы $\Sigma^{\rho}_{M_0}$

$$u(P_0) < u(M_0),$$

то это неравенство, в силу непрерывности $u(M)$, будет иметь место и в некоторой окрестности точки P_0 на сфере $\Sigma^{\rho}_{M_0}$, откуда

$$\int\limits_{\Sigma^{\rho}_{M_0}} u(P)\,ds < 4\pi\rho^2 u(M_0),$$

что приводит к противоречию. Следовательно, всюду на сфере $\Sigma^{\rho}_{M_0}$

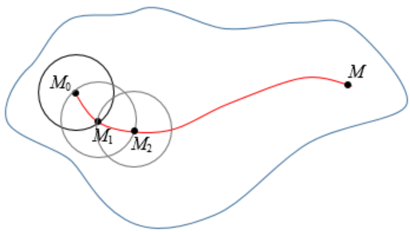
$$u(P) \equiv u(M_0).$$

Поскольку ρ произвольно, то его можно выбрать так, чтобы сфера $\Sigma^{\rho}_{M_0}$ касалась поверхности S. Точку касания обозначим M^*. В точке M^* и достигается максимальное значение $u_0 = u(M_0)$.

Применяя приведенные рассуждения к гармонической функции $v \equiv -u$, можно доказать достижение на поверхности S минимального значения.

З а м е ч а н и е. Формулировку принципа максимума можно усилить. Покажем, что если непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$ гармоническая функция $u(M)$ достигает своего максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области D, то она равна постоянной. Из проведенных рассуждений следует, что функция $u(M)$ равна u_0 не только на сфере $\Sigma^{\rho}_{M_0}$, но и, в силу произвольности ρ, всюду внутри шара $D^{\rho}_{M_0}$, ограниченного этой сферой.

Возьмем произвольную точку M области D. Соединим точки M_0 и M кривой γ, целиком лежащей в области D. Обозначим наименьшее расстояние точек γ от поверхности S через d, а длину кривой γ – через l. Пусть точка M_1 является последней точкой пересечения кривой γ и сферы $\Sigma^{d}_{M_0}$.



Поскольку $u(M_1) = u(M_0)$, то, повторяя проведенные рассуждения, получим, что всюду внутри шара $D^d_{M_1}$ радиуса d с центром в точке M_1 функция u постоянна и равна $u(M_0)$. Взяв на кривой γ Точку M_2, являющейся последней точкой пересечения кривой γ и сферы $\Sigma^d_{M_1}$, и продолжая данный процесс, в результате конечного числа шагов, которое не более l/d, получим, что внутри шара, которому принадлежит точка M, функция u постоянна и равна $u(M_0) = u_0$. В силу произвольности точки M и непрерывности функции u в замкнутой области $\overline{D}$ заключаем, что $u \equiv u(M_0) = u_0$ всюду в замкнутой области $\overline{D}$. Таким образом, из всех гармонических функций, непрерывных в $\overline{D}$, только постоянная может достигать своего максимального значения во внутренних точках области. Аналогичное утверждение можно доказать и относительно минимального значения.

Можно формулировку принципа максимума усилить и сформулировать его следующим образом: *гармоническая в области D функция, отличная от постоянной, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, достигает своих максимальных и минимальных значений только на границе S области D.*

Следствие 1. *Если гармоническая в D функция $u(M)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и принимает постоянное значение на границе S области D, то это же значение функция принимает в любой точке области D, т. е. $u(M) = const$, $\forall M \in \overline{D}$.*

Следствие 2. (Принцип сравнения.) *Если две гармонические в D функции $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$ и $u|_S \geq v|_S$, то всюду внутри области D имеет место $u(M) \geq v(M)$.*

Рекомендуемая литература

Ефимов А. В. и др. Математический анализ (специальные разделы). Ч. II. Применение некоторых методов математического и функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1980. – 295 с.

Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. – М.: Наука, 2004. – 416 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.