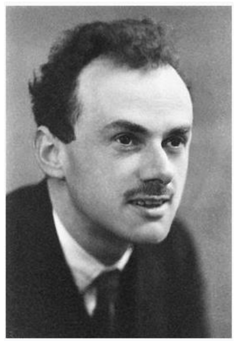
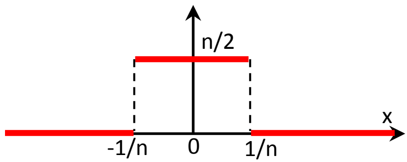
δ-функция Дирака. Температурное поле, создаваемое точечным источником тепла



δ-функция Дирака была введена П. Дираком[1] для описания сосредоточенных воздействий. В нестрогой форме она определялась как «странная» функция, равная 0 всюду, кроме одной точки, где она равна ∞, причем интеграл от этой функции равен 1. δ-функция не может быть определена как классическая функция, но является примером обобщенных функций (теория обобщенных функций разработана в работах С.Л.Соболева, Л. Шварца, И.М. Гельфонда и др. авторов).

К понятию δ-функции можно прийти, рассматривая ее как предел функциональных последовательностей, обладающих определенными свойствами. Рассмотрим, например, последовательность $\{\delta_n\} = \delta_1(x), \delta_2(x), \ldots, \delta_n(x) \ldots$ кусочно-постоянных функций, определенных на интервале $(-\infty; +\infty)$ по правилу:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n/2, & |x| \le 1/n, \\ 0, & |x| < 1/n. \end{cases}$$



Можно заметить, что при любых значениях n функция $\delta_n(x)$ обладает рядом свойств:

---

[1] **Поль Адриен Морис Дира́к** (фр. *Paul Adrien Maurice Dirac*; 8 августа 1902, Бристоль — 20 октября 1984, Таллахасси) — английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Источник фотографии: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%80%D0%B0%D0%BA,_%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%8C_%D0%90%D0%B4%D1%80%D0%B8%D0%B5%D0%BD_%D0%9C%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%81

1) Условие четности: $\delta_n(x) = \delta_n(-x)$.

2) Условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)dx = 1.$

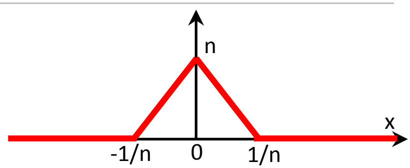
3) Для любой непрерывной функции f(x):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x)dx = f(\bar{x}) \quad \text{где } \bar{x} \in (-1/n; 1/n).$$

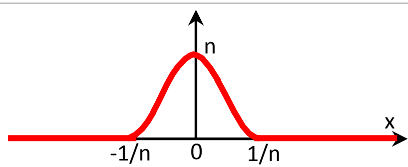
При этом, очевидно, $\bar{x} \to 0$, если $n \to +\infty$.

Свойствами 1) – 3) обладают также и другие последовательности функций $\delta_n(x)$, которые можно назвать локализованными вблизи точки x = 0. Например,

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n - n^2 |x|, & |x| \le 1/n, \\ 0, & |x| < 1/n. \end{cases}$$



$$\delta_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}(1 + \cos n\pi x), & |x| \le 1/n, \\ 0, & |x| < 1/n. \end{cases}$$



Если у рассмотренных локализованных последовательностей $\delta_n(x)$ устремить $n \to +\infty$, то придем к соотношению:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

которое показывает, что предельный элемент этих последовательностей не является функцией в классическом понимании. Поэтому предел при $n \to +\infty$ следует понимать не в смысле равномерной сходимости, а в смысле слабой сходимости последовательности.

Говорят, что последовательность $\{y_n(x)\}$ *сходится слабо на интервале (a, b) , если для любой непрерывной функции* f(x) *существует предел:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b y_n(x)f(x)dx=\int_a^b y(x)f(x)dx,$$

который и определяет предельный элемент слабо сходящейся последовательности, даже если предельный элемент не является функцией в классическом смысле.

Итак, назовем предельный элемент, к которому в случае слабой сходимости сходятся рассмотренные выше локализованные последовательности $\delta_n(x)$, обобщенной дельта функцией и обозначим символом $\delta(x)$.

Свойства 1) – 3) функций $\delta_n(x)$ не зависят от n. Поэтому эти свойства можно приписать и предельному элементу, т. е. считать, что $\delta(x) = \delta(-x)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1, \qquad (1)$$

Или для произвольного интервала (a, b):

$$\int_a^b \delta(x)dx=\begin{cases}0, & 0\notin(a,b),\\ 1, & 0\in(a,b).\end{cases}$$

При этом для любой непрерывной функции f(x) выполняется соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0). \qquad (2)$$

Формулу (1) можно рассматривать как следствие формулы (2) при $f(x)\equiv 1$. Поэтому интегральное соотношение (2) следует выделить как основное свойство δ-функции, рассматривая фактически формулу (2) как определение δ-функции в случае слабой сходимости и понимая ее как:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(x)f(x)dx = f(0).$$

Наряду с $\delta(x)$ для описания сосредоточенного воздействия в точке $x=x_0$ вводят дельта-функцию вида $\delta(x-x_0)$, определяемую соотношением:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0\in(a,b), \\ 0, & x_0\notin(a,b). \end{cases}$$

Примеры использования δ-функции

Пусть функция f(x,t) описывает плотность распределения источников тепла на прямой, т.е. определяет, какое количество тепла выделяется в точке x в момент времени t.

1) Если в точке x_0 непрерывный источник тепла мощности Q, то функцию f(x,t) запишем в виде $f(x,t) = Q\delta(x-x_0)$.
2) Если в точке x_1 в момент времени t_1 мгновенно выделяется количество тепла Q, то $f(x,t) = Q\delta(x-x_1)\,\delta(t-t_1)$.
3) Пусть в точке x_1 находится непрерывно-действующий источник мощности Q_1, в точке x_2 – источник, который выделяет в момент времени t_2 количество тепла, равное Q_2, то

$$f(x,t) = Q_1\delta(x-x_1) + Q_2\delta(x-x_2)\,\delta(t-t_2).$$

Задача 1

В точке x_0 размещен точечный источник тепла, который в момент времени t_1 мгновенно выделяет количество тепла, равное Q. Постройте функцию u(x,t), которая описывает температурное распределение на прямой, если известно, что в начальный момент времени температура точек прямой равнялась 0.

Конспект решения:

1. Плотность распределения источников на прямой

$$F(x,t) = Q\,\delta(x - x_0)\delta(t - t_1).$$

2. Задача Коши

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x,t)}{c\rho}, \qquad x \in R, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in R.$$

3. Решение задачи Коши

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{Q}{c\rho} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x_0)\delta(\tau - t_{1\partial}) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

4. Преобразование решение с помощью свойств δ-функции:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & t \le t_1, \\ \dfrac{Q}{c\rho} G(x,x_0,t-t_1) & t > t_1. \end{cases}$$

5. *Интерпретация решения*: температура не изменится по сравнению с начальной температурой до момента времени t_1, когда произойдет выделение источником тепла в объеме Q. При $t > t_1$ температурное распределение будет описываться с помощью функции Грина, учитывающей момент действия источника.

Задача 2

В точке x_0 размещен точечный источник тепла постоянной мощности Q, который непрерывно действует с начального момента времени t = 0. Постройте функцию u(x,t), которая описывает температурное распределение на прямой, если известно, что начальная температура равнялась 0.

<u>Конспект решения</u>:

1. Плотность распределения источников на прямой

$$F(x,t) = Q\,\delta(x - x_0).$$

2. Задача Коши

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x,t)}{c\rho}, \quad x \in R, \; t > 0, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho},$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in R.$$

3. Решение задачи Коши

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{Q}{c\rho} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x_0) G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. = \frac{Q}{c\rho} \int_0^t G(x,x_0,t-\tau)\,d\tau.$$

4. Преобразование решения

$$u(x,t) = \frac{Q}{c\rho} \int_0^t G(x,x_0,t-\tau)\,d\tau = \frac{Q}{2ac\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau.$$

Замена

$$z = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{t-\tau}}, \;\; \text{где } \mathrm{A} = \frac{|x - x_0|}{2a}.$$

Результат преобразования:

$$u(x,t) = \frac{Q}{ac\rho\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{t} \cdot e^{-\mathrm{A}^2/t} - \mathrm{A}\sqrt{\pi} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{t}} \right) \right) \right),$$

где функция $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл ошибок:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2}\,dz.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Подготовить графическую иллюстрацию к задаче 2: задавая параметры источника – Q, x_0 и параметры среды – c, ρ, k, постройте температурное распределение на прямой в различные моменты времени (компьютерная реализация).
2. Постройте функцию $u(x, t)$, которая описывает температурное распределение на прямой, вызванное действием двух точечных источников. Один источник располагается в точке x_1, имеет постоянную мощность Q_1 и действует с начального момента времени, второй – размещен в точке x_2 и в момент времени $t_2 > 0$ выделяет количество тепла Q_2. Начальная температура равняется 0.