Формулы Грина

Пусть область $D \subset R^n$ ограничена замкнутой гладкой поверхностью S (кривой в случае $n = 2$). Пусть в области $\overline{D} = D \cup S$ заданы функции $u = u(M)$ и $v = v(M)$, непрерывные вместе с первыми производными в $\overline{D}$ и имеющие непрерывные вторые производные в D:

$$u, v \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D).$$

Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{A} = v\nabla u$ (или $v\,\mathrm{grad\,u}$). Очевидно, она является непрерывной в $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемой в D. Значит, для нее справедлива формула Остроградского – Гаусса, т. е. имеет место:

$$\int\limits_D \mathrm{div}(v\nabla u)\,d\sigma = \int\limits_S (v\nabla u)\,\mathrm{n}^0\,ds, \tag{1}$$

где n^0 – внешняя единичная нормаль в точке поверхности (кривой) S. Здесь $\int\limits_D$ обозначает тройной (когда $n = 3$) или двойной (когда $n = 2$) интегралы, а $\int\limits_S$ – поверхностный интеграл (когда $n = 3$) или интеграл по кривой (когда $n = 2$). Так как[1]

$$\mathrm{div}(v\nabla u) = \nabla v \nabla u + v\,\mathrm{div}(\nabla u) = \nabla v\nabla u + v\Delta u,$$

$$(v\nabla u)\,\mathrm{n}^0 = (v\,\mathrm{grad}\,u)\mathrm{n}^0 = v\frac{du}{dn},$$

то из формулы (1) получим следующую

$$\int\limits_D v\Delta u\,d\sigma = \int\limits_S v\frac{du}{dn}\,ds - \int\limits_D \nabla v\nabla u\,d\sigma. \tag{2}$$

Формулу (2) принято называть *первой формулой Грина.* Здесь $\frac{d}{dn}$ есть производная по направлению внешней нормали. Если поменять местами функции u и v, то получим равенство

$$\int\limits_D u\Delta v\,d\sigma = \int\limits_S u\frac{dv}{dn}\,ds - \int\limits_D \nabla u\nabla v\,d\sigma,$$

[1] Операторы ∇ («набла») и div:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \quad \mathrm{div} u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

вычитая которое из (2), получим *вторую формулу Грина*

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\, d\sigma = \int\limits_S \left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn} \right) ds. \tag{3}$$

Выведем формулу, выражающую значение функции $u(M_0)$ в произвольной точке $M_0 \in D$ с помощью тройного и поверхностного интегралов, называемую *интегральным представлением функции.*

Теорема 1. *Если функция $u(M)$ непрерывна вместе с частными производными до второго порядка включительно в конечной пространственной области $\overline{D}$, ограниченной гладкой поверхностью S, то имеет место интегральное представление*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\int\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) \right) ds - \int\limits_D \frac{1}{r}\Delta u\, d\sigma \right), \tag{4}$$

где r – расстояние между фиксированной точкой $M_0 \in D$ и произвольной точкой $M \in \overline{D}$.

Доказательство. Функция $1/r = 1/r_{M_0M}$ – гармоническая всюду в области D, кроме точки M_0. Заключим точку M_0 в шар $D_\varepsilon \subset D$ с центром в этой точке радиуса ε. Поверхность шара обозначим S_ε. Функция $\frac{1}{r_{M_0M}}$ будет гармонической в области $D \setminus D_\varepsilon$. При этом $\Delta\frac{1}{r_{M_0M}} = 0$. Применяя формулу Грина (3) к функциям u и $v = \frac{1}{r}$ в области $D \setminus D_\varepsilon$, получим равенство

$$\int\limits_{D\setminus D_\varepsilon} \frac{1}{r}\Delta u\, d\sigma = \int\limits_{S\cup S_\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) ds. \tag{5}$$

Нормаль к внутренней стороне сферы S_ε направлена по радиусу центру сферы ($\mathrm{n} = -\mathrm{r}$), поэтому для производной по направлению n будем иметь:

$$\frac{d(1/r)}{dn} = -\frac{d(1/r)}{dr} = \frac{1}{r^2}.$$

Применяя к поверхностным интегралам

$$I_1 = \int\limits_{S_\varepsilon} u\frac{d(1/r)}{dn} ds \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{du}{dn} ds$$

теорему о среднем и учитывая, что на поверхности сферы $r = \varepsilon$, будем иметь следующее представление интегралов:

$$I_1 = \int\limits_{S_\varepsilon} u\frac{1}{\varepsilon^2}ds = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon} u\,ds = \frac{u(M_1)}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi u(M_1),$$

$$I_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{du}{dn}ds = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{du}{dn}\right)_{M_2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\varepsilon\left(\frac{du}{dn}\right)_{M_2},$$

где M_1 и M_2 – точки сферы S_ε. Подставив I_1 и I_2 в равенство (5), перепишем его в виде

$$u(M_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\int\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)ds - \int\limits_{D\setminus D_\varepsilon}\frac{1}{r}\Delta u\,d\sigma + 4\pi\varepsilon\left(\frac{du}{dn}\right)_{M_2}\right). \tag{6}$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$. Здесь поверхностные интегралы не зависят от ε, выражение $4\pi\varepsilon\left(\frac{du}{dn}\right)_{M_2} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и можно показать, что несобственный интеграл $\int\limits_D \frac{1}{r}\Delta u\,d\sigma$ существует и является пределом интеграла $\int\limits_{D\setminus D_\varepsilon}\frac{1}{r}\Delta u\,d\sigma$. Таким образом, из равенства (6) с помощью предельного перехода получаем формулу (4), дающую интегральное представление функции $u(M_0)$. □

Формулу, аналогичную (4), можно получить и для плоской области D. Эта формула приводится в следующей теореме.

Теорема 2. *Если функция $u(M)$ непрерывна вместе с частными производными до второго порядка включительно в плоской области $\overline{D}$, ограниченной контуром γ, то имеет место интегральное представление*

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_\gamma\left(\ln\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)dl - \int\limits_D \ln\frac{1}{r}\,\Delta u\,d\sigma\right),$$

где r – расстояние между фиксированной точкой $M_0 \in D$ и произвольной точкой $M \in \overline{D}$.

Замечание. Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1 с использованием второй формулы Грина для случая $n = 2$, в которой функция $v = \ln \frac{1}{r}$ является гармонической всюду, кроме точки $r = 0$.

Рекомендуемая литература

Ефимов А. В. и др. Математический анализ (специальные разделы). Ч. II. Применение некоторых методов математического и функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1980. – 295 с.

Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. – М.: Наука, 2004. – 416 с.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.