Тест по дисциплине «Уравнения с частными производными»

Раздел 1. Уравнения с частными производными 1-го порядка

1. Общее решение уравнения $u_x + yu_y = 0$ имеет вид:
   A. $u(x,y) = x - \ln y + C,$ где C – произвольная постоянная,
   B. $u(x,y) = F(x - \ln|y|),$ где $F(z)$ – произвольная дифференцируемая функция,
   C. $u(x,y) = F(x + \ln|y|),$ где $F(z)$ – произвольная дифференцируемая функция,
   D. $F(x - \ln|y| - u) = C,$ где C – произвольная постоянная.

2. Частным решением уравнения $xu_x - yu_y = 0,$ удовлетворяющим условию $u(x,1) = x,$ является функция:
   A. $u(x,y) = x + \ln y,$
   B. $u(x,y) = \dfrac{x}{y},$
   C. $u(x,y) = xy,$
   D. $u(x,y) = x + y - 1.$

3. Какие из перечисленных функций являются решениями уравнения $\frac{1}{x}u_x + \frac{1}{y}u_y = 0$:
   A. $u(x,y) = \sin(x^2 - y^2),$
   B. $u(x,y) = 2(x^2 - y^2) + 4,$
   C. $u(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + x,$
   D. $u(x,y) = \dfrac{1}{\cos(x^2 + y^2) + 1}.$

4. Каким образом ввести новые независимые переменные $\xi = \xi(x,y),\quad \eta = \eta(x,y),$ чтобы уравнение $2u_x - u_y = 0$ можно было бы привести к каноническому виду $u_\eta = 0$?
   A. $\xi = x - 2y,\quad \eta = y,$
   B. $\xi = x,\quad \eta = x + 2y,$
   C. $\xi = x,\ \eta = 2y,$
   D. $\xi = x + 2y,\quad \eta = x.$

Раздел 2. Простейшие уравнения в частных производных 2-го порядка

5. Общее решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ имеет вид (C_1 и C_2- произвольные дифференцируемые функции):
   A. $u = yC_1(x) + C_2(y),$
   B. $u = xC_1(x) + C_2(y),$
   C. $u = xC_1(y) + C_2(y),$
   D. $u = xC_1(y) + C_2(x,y).$

6. Общее решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ имеет вид (C_1 и C_2 - произвольные дифференцируемые функции):
   A. $u=e^{-x}C_1(y)+C_2(y)$,
   B. $u=e^{-x}C_1(x)+C_2(y)$,
   C. $u=e^{-y}C_1(y)+C_2(x)$,
   D. $u=e^{-x}C_1(y)+C_2(x)$.

Раздел 3. Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка. Канонический вид уравнения

7. Какой тип имеет уравнение $u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}+2u_x-u_y+u=0$?
   A. Параболический.
   B. Гиперболический.
   C. Эллиптический.

8. При каких значениях параметра a уравнение $u_{xx}+2u_{xy}+(a-1)u_{yy}+u_y+u=0$ имеет параболический тип?
   A. $a = 0$.
   B. $a = 5$.
   C. $a = 2$.
   D. Ни при каких.

9. В каких точках плоскости уравнение $u_{xx}-2xu_{xy}-(y^2-4)u_{yy}+yu_x-xu=y$ имеет гиперболический тип?
   A. В любой точке плоскости.
   B. Вне круга с центром в начале координат радиусом 2.
   C. Внутри круга с центром в начале координат радиусом 2.
   D. Ни в одной точке плоскости.

10. С помощью какого преобразования независимых переменных уравнение $u_{xx}+4u_{xy}+13u_{yy}=0$ приводится к каноническому виду?
    A. $\xi=2x+y, \quad \eta=3x$.
    B. $\xi=2x+y, \quad \eta=x$.
    C. $\xi=2x+y, \quad \eta=-3x$.
    D. $\xi=2x-y, \quad \eta=3x$.

11. Какой тип имеет уравнение $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$?
    A. Параболический.
    B. Гиперболический.
    C. Эллиптический.

12. Какой тип имеет уравнение $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)$?
    A. Параболический.
    B. Гиперболический.
    C. Эллиптический.

13. Какой тип имеет уравнение $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$?
    A. Параболический.
    B. Гиперболический.
    C. Эллиптический.
14. Какое название соответствует уравнению $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$?
    A. Уравнение теплопроводности.
    B. Волновое уравнение.
    C. Уравнение Лапласа.
    D. Уравнение Пуассона.
15. Какое название соответствует уравнению $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$?
    A. Уравнение теплопроводности.
    B. Волновое уравнение.
    C. Уравнение Лапласа.
    D. Уравнение Пуассона.
16. Какое название соответствует уравнению $u_{xx} + u_{yy} = 0$?
    A. Уравнение теплопроводности.
    B. Волновое уравнение.
    C. Уравнение Лапласа.
    D. Уравнение Пуассона.
17. Какое название соответствует уравнению $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$?
    A. Уравнение теплопроводности.
    B. Волновое уравнение.
    C. Уравнение Лапласа.
    D. Уравнение Пуассона.
18. Уравнения какого типа имеют следующий канонический вид $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$?
    A. Параболический.
    B. Гиперболический.
    C. Эллиптический.
19. Уравнения какого типа имеют следующий канонический вид $u_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$?
    A. Параболический.
    B. Гиперболический.
    C. Эллиптический.
20. Уравнения какого типа имеют следующий канонический вид $u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$?
    A. Параболический.
    B. Гиперболический.
    C. Эллиптический.
21. Какой канонический вид имеет уравнение $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$?
    A. $u_{\xi\eta} = 0.$
    B. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$
    C. $u_{\xi\xi} = 0.$
    D. $u_\xi + u_{\eta\eta} = 0.$

Раздел 4. Задача Коши на прямой

22. Решение какой краевой задачи в области $D=\{(x,t):\ x\in R,\ t>0\}$ представимо формулой Даламбера $u(x,t)=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$?

A. $u_{tt}=a^2u_{xx}+\varphi(x),\ \ u(x,0)=\psi(x).$

B. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x).$

C. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ u(x,0)=\psi(x),\ \ u_t(x,0)=\varphi(x).$

D. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ u(0,t)=\varphi(t),\ \ u(l,t)=\psi(t).$

23. Какому условию удовлетворяет функция, представимая с помощью формулы Даламбера $u(x,t)=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,$ если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются нечетными?

A. $u(0,t)=0.$

B. $u_x(0,t)=0.$

C. $u(0,t)=u_x(0,t)=0.$

D. $u_x(0,t)-u(0,t)=0.$

24. Какому условию удовлетворяет функция, представимая с помощью формулы Даламбера $u(x,t)=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,$ если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются четными?

A. $u(0,t)=0.$

B. $u_x(0,t)=0.$

C. $u(0,t)=u_x(0,t)=0.$

D. $u_x(0,t)-u(0,t)=0.$

25. Решение какой краевой задачи в области $D=\{(x,t):\ x\in R,\ t>0\}$ представимо с помощью интеграла Пуассона $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$?

A. $u_t=a^2u_{xx}+\varphi(x),\ \ u(x,0)=0.$

B. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=0.$

C. $u_t=a^2u_{xx},\ \ u(x,0)=\varphi(x).$

D. $u_{tt}=a^2u_{xx}+\varphi(x),\ \ u(0,t)=u(l,t)=0.$

26. Какому условию удовлетворяет функция, представимая с помощью интеграла Пуассона $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi,$ если функция $\varphi(x)$ является нечетной?

A. $u(0,t)=0.$

B. $u_x(0,t)=0.$

C. $u(0,t)=u_x(0,t)=0.$

D. $u_x(0,t)-u(0,t)=0.$

27. Какому условию удовлетворяет функция, представимая с помощью интеграла Пуассона $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi,$ если функция $\varphi(x)$ является четной?

A. $u(0,t)=0.$

B. $u_x(0,t)=0.$

C. $u(0,t)=u_x(0,t)=0.$

D. $u_x(0,t)-u(0,t)=0.$

Раздел 5. Задача Штурма-Лиувилля

28. Собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля $\begin{cases} X''+cX=0, \\ X(0)=X(1)=0 \end{cases}$ являются функции:

A. $X_k=\sin k\pi x, \quad k=1,2,...$

B. $X_k=\sin kx, \quad k=1,2,...$

C. $X_k=\sin\frac{(2k+1)}{2}x, \quad k=0,1,2,...$

D. $X_k=\cos kx, \quad k=0,1,2,...$

29. Для задачи Штурма-Лиувилля $\begin{cases} X''+cX=0, \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases}$ какие из нижеприведённых высказываний являются верными:

а) все собственные значения являются вещественными и неотрицательными.

б) все собственные функции имеют одинаковую норму.

в) собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, **являются** ортогональными на отрезке [0; l] с весом, равным единице.

г) задача имеет **конечное** количество собственных значений.

A. Все верны.
B. а), в), г).
C. а), в).
D. а), б), в).

30. Для краевой задачи $u_t=u_{xx}, \quad 0<x<\pi, \quad t>0, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0,$ соответствующей задачей Штурма-Лиувилля является:

A. $X''(x)+cX(x)=0, \quad X'(0)=0, \quad X(\pi)=0,$

B. $X''(x)+cX(x)=0, \quad X(0)=0, \quad X(\pi)=0,$

C. $X''(x)+cX(x)=0, \quad X(0)=0, \quad X'(\pi)=0,$

D. $X''(x)+cX(x)=0, \quad X'(0)=0, \quad X'(\pi)=0.$

Раздел 6. Смешанные краевые задачи. Метод Фурье

31. Решением смешанной задачи: $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = \cos 2x, \ \ 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t < +\infty. \end{cases}$ является функция:

A. $u(x,t) = e^{-2t}\cos 2x$.

B. $u(x,t) = e^{-4t}\sin 2x$.

C. $u(x,t) = e^{4t}\cos 2x$.

D. $u(x,t) = e^{-4t}\cos 2x$.

32. Решением смешанной задачи: $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t < +\infty \end{cases}$ является функция:

A. $u(x,t) = \cos x \cos 2t$.

B. $u(x,t) = \sin x \sin 4t$.

C. $u(x,t) = \sin x \cos 2t$.

D. ни одна из выше перечисленных.

33. В виде какого ряда можно искать решение смешанной краевой задачи:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t), \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t < +\infty? \end{cases}$$

A. $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin kx,$

B. $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos kx,$

C. $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{(2k-1)x}{2},$

D. $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cos\frac{(2k-1)x}{2},$

Раздел 7. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона

34. Какое максимальное значение принимает функция в круге с центром в начале координат и радиусом $R = 1$, которая является классическим решением краевой задачи:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$
$$u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1} = 5.$$

Ответ:

35. Какое минимальное значение принимает функция в кольце, ограниченном окружностями с центром в начале координат и радиусами R_1=1 и R_2=2, которая является классическим решением краевой задачи:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 1 < x^2 + y^2 < 2,$$
$$u(x, y)\big|_{x^2+y^2=1} = 5, \quad u(x, y)\big|_{x^2+y^2=4} = 3.$$

Ответ:

36. Какие из нижеприведённых высказываний являются верными:

а) Для разрешимости **задачи Неймана** для уравнения Лапласа в ограниченной области необходимо, чтобы интеграл по границе области от нормальной производной искомой функции равнялся нулю.

б) Для разрешимости **задачи Дирихле** для уравнения Лапласа в ограниченной области необходимо, чтобы интеграл по границе области от искомой функции равнялся нулю.

в) Если функция является **гармонической** в замкнутой области, то интеграл по границе этой области от её нормальной производной равен нулю

г) Если функция, гармоническая внутри замкнутой области, принимает на границе области постоянное значение, то она принимает это же значение в любой внутренней точке области.

A. а) и б).
B. а), в), г).
C. в), г).
D. Все верны.