

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ:

**Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными.**

**Приведение уравнения к каноническому виду.**

Рассматривается линейное уравнение в частных производных второго порядка для  $u = u(x, y)$  в следующем виде:

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (*)$$

1. Когда уравнение (\*) в точке  $M(x_0, y_0)$  имеет
  - 1) гиперболический тип;
  - 2) параболический тип;
  - 3) эллиптический тип?
2. Запишите квадратичную форму, соответствующую уравнению (\*).
3. Запишите уравнение характеристик, соответствующее уравнению (\*).
4. Запишите уравнения, решения которых определяют два семейства характеристик для уравнения (\*). В каком случае решения уравнений описывают два одинаковых семейства характеристик?
5. Приведите пример линейного невырожденного преобразования независимых переменных.
6. Приведите пример нелинейного невырожденного преобразования независимых переменных.
7. С помощью какого преобразования уравнение (\*) приводится к каноническому виду? При каком условии преобразование является линейным?
8. Запишите канонические формы уравнения (\*) (если выполнено преобразование, указанное в п.7):
9. Постройте выражения для производных  $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$  при переходе к новым переменным:

$$\begin{cases} \xi = e^x \cos y, \\ \eta = xy. \end{cases}$$

10. Укажите на плоскости геометрическое место точек, в которых сохраняется тип уравнения:

$$xu_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} + 2xyu_x - u + xy = 0.$$

11. При каких значениях параметра  $a \in R$  уравнение

$$(3a - 5)u_{xx} - 2(a - 1)u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u = 0$$

имеет

- 1) гиперболический тип;
- 2) параболический тип;
- 3) эллиптический тип?

При  $a = 3$  приведите уравнение к каноническому виду.

12. Приведите уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} - 4u_x + 5u_y = 0.$$

Возможны ли дальнейшие упрощения уравнения?

13. Приведите уравнения к каноническому виду

$$u_{xx} - 2 \cos x \cdot u_{xy} - (4 - \cos^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0.$$