

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ:

Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными.

Приведение уравнения к каноническому виду.

Рассматривается линейное уравнение в частных производных второго порядка для $u = u(x, y)$ в следующем виде:

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (*)$$

1. Когда уравнение (*) в точке $M(x_0, y_0)$ имеет
 - 1) гиперболический тип;
 - 2) параболический тип;
 - 3) эллиптический тип?
2. Запишите квадратичную форму, соответствующую уравнению (*).
3. Запишите уравнение характеристик, соответствующее уравнению (*).
4. Запишите уравнения, решения которых определяют два семейства характеристик для уравнения (*). В каком случае решения уравнений описывают два одинаковых семейства характеристик?
5. Приведите пример линейного невырожденного преобразования независимых переменных.
6. Приведите пример нелинейного невырожденного преобразования независимых переменных.
7. С помощью какого преобразования уравнение (*) приводится к каноническому виду? При каком условии преобразование является линейным?
8. Запишите канонические формы уравнения (*) (если выполнено преобразование, указанное в п.7):
9. Постройте выражения для производных $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ при переходе к новым переменным:

$$\begin{cases} \xi = e^x \cos y, \\ \eta = xy. \end{cases}$$

10. Укажите на плоскости геометрическое место точек, в которых сохраняется тип уравнения:

$$xu_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} + 2xyu_x - u + xy = 0.$$

11. При каких значениях параметра $a \in R$ уравнение

$$(3a - 5)u_{xx} - 2(a - 1)u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u = 0$$

имеет

- 1) гиперболический тип;
- 2) параболический тип;
- 3) эллиптический тип?

При $a = 3$ приведите уравнение к каноническому виду.

12. Приведите уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} - 4u_x + 5u_y = 0.$$

Возможны ли дальнейшие упрощения уравнения?

13. Приведите уравнения к каноническому виду

$$u_{xx} - 2 \cos x \cdot u_{xy} - (4 - \cos^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0.$$

Приведение уравнения к каноническому виду в случае n ($n > 2$) независимых переменных

14. Как определить тип уравнения в точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x)?$$

15. Определите тип уравнения ($u = u(x, y, z)$) :

$$4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$$

и приведите его к каноническому виду.