Задания для самопроверки к началу изучения курса

1. Найдите производную функции $y(x) = \int_0^x \sin\frac{x-\xi}{a} d\xi$.
2. Для функции $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, найдите $\mathrm{grad}\, u$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
3. Для заданной скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ и векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ запишите следующие операции $\mathrm{div}(\varphi\, \vec{a})$, $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi$:
$$\varphi(x, y, z) = x \cdot \cos(y) + z^2, \qquad \vec{a} = (x + y, z \cdot \sin(x), y).$$
4. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y'(x) + y = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$.
5. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y''(x) + y = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.
6. Найдите частные производные первого и второго порядков от следующих функций $u(x, y) = x\sin(x + y)$, $u(x, y) = \mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.
7. Найдите частные производных u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} от функции $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = 2xy$.
8. Докажите, что функция $u = \ln(1/r)$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
9. Докажите, что функция $u = 1/r$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.
10. Постройте выражение для оператора Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в полярных координатах.
11. Найдите коэффициенты разложения функций $u(x) = x$ и $u(x) = 1$ на отрезке [0, 1] в тригонометрический ряд Фурье.
12. Найдите производную y' для функции $y(x)$, определяемой следующим уравнением $x^2 + 2xy - y^2 = 4$.
13. Найдите производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора r этой точки.