

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПетрГУ)

Институт математики и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

_____ К.Г. Тарасов

«___» _____ 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Направление подготовки бакалавриата
01.03.01 Математика

Профиль направления подготовки бакалавриата
«Математика в образовании, фундаментальных
и прикладных исследованиях»

Форма обучения *очная*

Петрозаводск
2023

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с ФГОС ВО, утвержденным приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 10.01.2018 г. № 8 (с изменениями от 08.02.2021 № 83, от 26.11.2020 № 1456, от 27.02.23 № 208), и учебным планом по направлению подготовки бакалавриата 01.03.01 Математика (профиль «Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях»).

Разработчик:

Семёнова Елена Евгеньевна, доцент кафедры прикладной математики и кибернетики Института математики и информационных технологий ПетрГУ, к.ф.-м.н., доцент

Эксперт:

Родченкова Наталья Ивановна, старший научный сотрудник лаборатории моделирования природно-технических систем Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН, руководитель службы научных коммуникаций КарНЦ РАН, к.ф.-м.н.

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и одобрена на заседании кафедры *прикладной математики и кибернетики*

Протокол № 8 от «16» мая 2023 г.

И.о. заведующего кафедрой _____ (к.ф.-м.н., доцент, Пешкова И.В.)

СОГЛАСОВАНО:

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и утверждена на заседании учебно-методической комиссии Института *математики и информационных технологий*

Протокол № 4 от «07» июня 2023 г.

Директор института _____ (к.ф.-м.н., доцент, Светова Н.Ю.)

Начальник учебно-методического управления ПетрГУ _____ М.В. Данилова

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) бакалавриата

1.1. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины и индикаторы достижения компетенций:

Код компетенции. Этап формирования компетенции	Формулировка компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 (основной)	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>ОПК-1.1. Знает основные понятия и методы фундаментальных математических дисциплин.</p> <p>ОПК-1.2. Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности.</p> <p>ОПК-1.3. Умеет осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.</p>
ОПК-2 (основной)	Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	<p>ОПК-2.1. Знает основные задачи и области применения методов математического моделирования, основные принципы математического моделирования, методы построения и анализа математических моделей.</p> <p>ОПК-2.2. Умеет применять методы математического моделирования к решению конкретных задач из различных областей естествознания, техники, экономики и управления; выбирать методы исследования математических моделей; строить и исследовать математические модели.</p> <p>ОПК-2.3. Владеет навыками применения математического аппарата к исследуемым моделям.</p>

1.2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- классификацию уравнений в частных производных, основные краевые задачи для уравнений математической физики (волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения диффузии, уравнений Лапласа и Пуассона), понятия классического и обобщенного решений краевых задач, стандартные приемы и методы преобразования и решения краевых задач;
- теоремы существования и единственности решения краевых задач; свойства гармонических функций; свойства решений краевых задач.

Уметь:

- определять тип уравнения с частными производными, давать постановки краевых задач, применять стандартные методы преобразования и решения краевых задач

(метод характеристик, метод разделения переменных (метод Фурье), метод продолжения, метод функций Грина);

- уметь выводить волновое уравнение, уравнения теплопроводности и диффузии; исследовать корректность основных краевых задач;
- доказывать существование классического решения краевой задачи; использовать принцип максимума для обоснования единственности решения первой краевой задачи для уравнений эллиптического и параболического типов.

Владеть навыками (опытом деятельности):

- методами определения корректности начально-краевых задач для основных типов линейных уравнений второго порядка; методами вывода уравнений на основе физических законов.
- построения в явном виде решений краевых задач; использования аппарата и основных методов теории уравнений с частными производными в различных приложениях.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата и язык преподавания

Дисциплина «Уравнения с частными производными» входит в обязательную часть учебного плана основной образовательной программы бакалавриата по данному направлению подготовки и является обязательной для изучения.

Согласно учебному плану дисциплина проводится в 5 и 6 семестрах.

Изучение дисциплины опирается на знания, умения и навыки, приобретенные при освоении образовательной программы предыдущего уровня, а также при изучении дисциплин учебного плана данной образовательной программы: *Алгебра, Математический анализ, Дифференциальные уравнения (обыкновенные дифференциальные уравнения), Функциональный анализ, Комплексный анализ, Физика.*

Знания, полученные при изучении дисциплины, необходимы для успешного освоения таких дисциплины, как *Численные методы*, а также при выполнении научно-исследовательской работы в области математического моделирования физических, биологических, экологических, экономических, социальных и других процессов живой и неживой природы.

Язык преподавания – русский.

3. Виды учебной работы и тематическое содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц или 216 академических часов.

3.1. Виды учебной работы

Виды учебной работы	Объем в академических часах
Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану	216
В том числе:	
Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), всего	90
В том числе:	
Лекции (Л)	45
Практические занятия (Пр)	45
Лабораторные занятия (Лаб)	0
Вид промежуточной аттестации	Зачет (5 семестр), Экзамен (6 семестр)

Самостоятельная работа обучающихся (СР) (всего) (Самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовка к занятиям. Подготовка к промежуточной аттестации)	126
--	------------

3.2. Краткое содержание дисциплины по разделам и видам учебной работы

№ п/п	Раздел дисциплины (тематический модуль)	Трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)					Оценочное средство
		Всего	Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа обучающихся	
Семестр № 5							
1	Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка	30	6	6		18	Контрольная работа, зачет
2	Системы двух уравнений в частных производных первого порядка	14	3	3		8	Контрольная работа, зачет
3	Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка	28	6	6		16	Зачет
Вид промежуточной аттестации в семестре - зачет							
Всего, 5 семестр		72	15	15		42	
Семестр № 6							
4	Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Метод характеристик	18	4	8	0	6	Контрольная работа 2, экзамен
5	Краевые задачи для уравнений гиперболического типа	34	10	8	0	16	Контрольная работа 3, экзамен
6	Краевые задачи для уравнений параболического типа	32	8	8	0	16	Контрольная работа 4, экзамен
7	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	24	8	6	0	10	Контрольная работа 5, экзамен
	Вид промежуточной аттестации в семестре – экзамен	36				36	
Всего, 6 семестр		144	30	30		84	
Итого:		216	45	45		126	

3.3. Содержание аудиторных занятий

Содержание лекционных занятий

№ раздела	№ лекции	Основное содержание	Количество часов	В т.ч. с использованием ЛОТ (*)
Семестр № 5				
1	1.1 - 1.3	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Линейные и квазилинейные уравнения. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения. Теорема об общем решении квазилинейного уравнения. Задача Коши. Интегральные поверхности, проходящие через заданную кривую. Поверхности, ортогональные данному семейству поверхностей. Уравнение переноса вещества потоком воздуха. Уравнение динамики возрастной структуры популяции.	6	0
2	2.1	Системы уравнений в частных производных первого порядка. Необходимые условия совместности уравнений.	3	0
3	3.1 - 3.3	Решение нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. Метод Лагранжа-Шарпа. Метод Якоби. Специальные типы уравнений первого порядка: уравнение, содержащее только производные; уравнения, не содержащие независимых переменных; уравнения с разделяющимися переменными; уравнение Клеро. Метод характеристик Коши.	6	0
Всего, 5 семестр			15	0
Семестр № 6				
4	4.1 - 4.2	Классификация уравнений с частными производными второго порядка. Канонические формы уравнений в частных производных. Метод характеристик.	4	
5	2.1 - 2.5	Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Классификация краевых задач. Формула Даламбера. Свойства решений задачи Коши. Краевые задачи на полупрямой. Метод продолжения. Колебания ограниченной струны. Решение краевых задач методом Фурье.	10	
6	3.1 - 3.4	Вывод уравнения диффузии. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка краевых задач. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение краевых задач методом Фурье. Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой. Фундаментальное решение. Интеграл Пуассона. Свойства фундаментального решения и его физический смысл. Краевые задачи на полупрямой. Метод продолжения.	8	
7	4.1 - 4.4	Задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона. Свойства гармонических функций: формулы Грина, принцип максимума. Решение краевых задач методом Фурье. Интеграл Пуассона. Свойства решений краевых задач.	8	
Всего, 6 семестр			30	

		Всего:	45	
--	--	---------------	-----------	--

Содержание практических занятий

№ раздела	№ занятия	Основное содержание	Количество часов	В т.ч. с использованием ДОТ (*)
Семестр № 5				
1	1.1	Линейные уравнения в частных производных 1-го порядка. Общее решение	2	
1	1.2	Квазилинейные уравнения в частных производных 1-го порядка.	2	
1	1.3	Интегральные поверхности, проходящие через заданную кривую. Поверхности, ортогональные данному семейству поверхностей.	2	
2	2.1 2.2	Системы уравнений в частных производных 1-го порядка с двумя независимыми переменными	3	
3	3.1	Решение нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. Метод Лагранжа-Шарпа. Метод Якоби.	2	
3	3.2 - 3.3	Специальные типы уравнений первого порядка: уравнение, содержащее только производные; уравнения, не содержащие независимых переменных; уравнения с разделяющимися переменными; уравнение Клеро.	4	
Всего, 5 семестр			15	
Семестр № 6				
4	4.1	Простейшие уравнения в частных производных 2-го порядка	2	
4	4.2 - 4.4	Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнения к каноническому виду. Метод характеристик. Контрольная работа № 2.	6	
5	5.1	Задача Штурма-Лиувилля. Разложение функции в ряд по системе собственных функций	2	
5	5.2	Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера.	2	
5	5.3 - 5.4	Краевые задачи для волнового уравнения на отрезке. Метод Фурье.	4	
6	6.1 - 6.3	Краевые задачи для уравнения теплопроводности (диффузии) на отрезке. Метод Фурье. Контрольная работа № 4.	6	
6	6.4	Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой. Интеграл Пуассона.	2	
7	7.1 - 7.3	Уравнение Лапласа в полярных координатах. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона методом разделения переменных.	6	

		<i>Всего, 6 семестр</i>	30
		Итого:	45

3.4. Организация самостоятельной работы обучающегося

Виды самостоятельной работы	Трудоемкость в час.
Самостоятельная проработка курса лекций при подготовке к практическим занятиям, работа с литературой	15
Выполнение домашних заданий. Номера заданий из сборников задач из списка основной литературы [2, 3] указывает преподаватель на практических занятиях (задания публикуются на сайте дисциплины https://edu.petsu.ru/object/2567 в разделе «Тематика практических занятий и задания для самостоятельной работы»).	15
Выполнение домашней контрольной работы № 1 «Уравнения в частных производных 1-го порядка».	3
Подготовка и сдача зачета (подготовка ответов на вопросы, список которых приводится в п. 5.2)	9
<i>Всего, 5 семестр</i>	42

Самостоятельная проработка курса лекций при подготовке к практическим занятиям, работа с литературой	15
Выполнение домашних заданий (в том числе заданий, решаемых с помощью систем компьютерной математики). Номера заданий из сборника задач [2] из списка основной литературы указывает преподаватель на практических занятиях (задания публикуются на сайте дисциплины http://math-it.petsu.ru/users/semenova/UMF/index_PMI.html в разделе «Тематика практических занятий и задания для самостоятельной работы»).	25
Подготовка к контрольной работе № 2 «Канонический вид уравнений в частных производных. Метод характеристик». Решение примерного варианта работы (см. п. 5.1)	2
Выполнение домашней Контрольной работы № 3 «Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа»	2
Подготовка к контрольной работе № 4 «Решение смешанной задачи для уравнения параболического типа». Решение примерного варианта работы (см. п. 5.1)	2
Выполнение домашней контрольной работы № 5 «Краевые задачи для уравнения Лапласа»	2
Подготовка к экзамену, сдача экзамена (подготовка ответов на вопросы, список которых приводится в п. 5.2)	36
<i>Всего, 6 семестр</i>	84
Всего за год	126

4. Образовательные технологии по дисциплине

При изучении дисциплины «Уравнения с частными производными» используются следующие образовательные технологии:

- аудиторные занятия (лекционные и практические занятия);
 - внеаудиторные занятия (самостоятельная работа, индивидуальные консультации).
- Лекционные и практические занятия проводятся в традиционной форме.

Предусматривается использование в учебном процессе следующих активных и интерактивных форм проведения занятий:

- практические занятия в диалоговом режиме;
- решение задач с помощью систем компьютерной математики.

Учебно-методические материалы публикуются на сайте дисциплины:

<http://math-it.petsu.ru/users/semenova/UMF/index.html>

<https://edu.petsu.ru/object/2567>

5. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

5.1. Текущий контроль осуществляется преподавателем дисциплины с помощью *устного опроса* на практических занятиях, при проведении занятий в форме *контрольной работы*, а также проверки выполнения *домашних заданий* и *домашних контрольных работ*. К оценочным средствам для текущего контроля относятся:

- аудиторные контрольные работы,
- домашние контрольные работы.

Примеры вариантов контрольных работ, критерии оценивания

Контрольная работа № 1 (домашняя) Уравнения в частных производных 1-го порядка

1. Решите уравнения:

$$1) \quad xy \frac{\partial u}{\partial x} - xz(y^2 + 1)^2 \frac{\partial u}{\partial y} + yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$2) \quad (4 + 3u - 3x) \frac{\partial u}{\partial x} + (6u - 1 - 3y) \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

2. Решите задачи Коши:

$$1) \quad (x^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0, y) = \sqrt{y};$$

$$2) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + 5y \frac{\partial u}{\partial y} = 10u, \quad u(-1, y) = y^3.$$

Критерий оценивания.

«Зачтено» выставляется, если выполнены правильно все задания, иначе – «не зачтено».

Контрольная работа № 2 (аудиторная) Канонический вид уравнений в частных производных. Метод характеристик

1. (2 балла). Укажите области на плоскости Oxy , где сохраняется тип уравнения:

$$(\cos^2 x + \sin^2 y)u_{xx} - 4(\cos x + \sin y)u_{xy} + 4u_{yy} - e^y u_x + 5u = 0.$$

2. (10 баллов). Решите задачу Коши:

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0,$$

$$u(x, \cos x) = 0, \quad u_y(x, \cos x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos x.$$

Критерий оценивания. В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом: 11–12 баллов – «отлично», 9–10 – «хорошо», 6–8 – «удовлетворительно», менее 6 баллов – «неудовлетворительно»

Контрольная работа № 3 (домашняя)

Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа

(10 баллов). В области $0 < x < 1$, $t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 8u_x - 4u_t + e^x \sin \pi x = 4(1 + x - 2t),$$

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = e^x \sin 4\pi x + 1 - x.$$

Критерий оценивания. В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом: 9–10 баллов – «отлично», 7–8 – «хорошо», 4–6 – «удовлетворительно», менее 4 баллов – «неудовлетворительно».

Контрольная работа № 4 (аудиторная)

Решение смешанной задачи для уравнения параболического типа

Для смешанной краевой задачи, рассматриваемой в области $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$

$$u_t = 4u_{xx} - 4(t - 1) + \cos 3\pi x + \frac{x^2}{2},$$

$$u_x(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = t,$$

$$u(x, 0) = x - \frac{x^2}{2} + \cos \pi x.$$

- 1) (4 балла). Постройте и решите соответствующую задачу Штурма–Лиувилля.
- 2) (4 балла). Постройте решение методом Фурье.

Критерий оценивания. В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом: 7–8 баллов – «отлично», 5–6 – «хорошо», 3–4 – «удовлетворительно», менее 3 баллов – «неудовлетворительно».

Контрольная работа № 5 (аудиторная)

Краевые задачи для уравнения Лапласа

1. (1 балл). Найдите гармоническую функцию $u(x, y)$ в круге радиуса $R = 2$, удовлетворяющую на границе области условию Дирихле

$$u(x, y)|_{x^2+y^2=4} = (x^2 + y^2)^2.$$

2. (2 балла). При каких значениях параметров A и B краевая задача

$$\Delta u(r, \varphi) = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\frac{\partial u(2, \varphi)}{\partial r} = Ax^2 - By^2 + y, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

имеет решение?

3. (3 балла). Найдите решение $u = u(r, \varphi)$ уравнения Лапласа в кольце $1 \leq r \leq 2$, удо-

влетворяющее на его границе следующим условиям:

$$u(1, \varphi) = 1, \quad u_r(2, \varphi) = \cos 2\varphi.$$

Критерий оценивания. В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом: 5–6 баллов – «отлично», 4 – «хорошо», 3 – «удовлетворительно», менее 3 баллов – «неудовлетворительно».

5.2. Промежуточная аттестация проводится в виде зачета и экзамена.

Условием получения зачета (5 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий; выполнение заданий, предлагаемых в рамках самостоятельной работы, выполнение контрольной работы № 1.

Вопросы к зачету (5 семестр)

1. Построение общего решения линейных однородных уравнений в частных производных 1-го порядка.
2. Построение общего решения линейных неоднородных и квазилинейных уравнений в частных производных 1-го порядка.
3. Нахождение поверхности, удовлетворяющей уравнению в частных производных 1-го порядка и проходящей через заданную линию.
4. Поверхности, ортогональные данному семейству поверхностей.
5. Решение краевой задачи для уравнения переноса вещества потоком воздуха.
6. Условия совместности системы уравнений в частных производных 1-го порядка.
7. Методы решения нелинейных уравнений в частных производных 1-го порядка.

Критерий оценивания

«**Зачтено**» выставляется обучающемуся, если он показал достаточно прочные знания основных положений учебной дисциплины, умение самостоятельно решать конкретные практические задачи, предусмотренные рабочей программой, ориентироваться в рекомендованной справочной литературе, умеет правильно оценить полученные результаты.

«**Не зачтено**» выставляется обучающемуся, если при ответе выявились существенные пробелы в знаниях основных положений учебной дисциплины, неумение с помощью преподавателя получить правильное решение конкретной практической задачи из числа предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

Условием допуска к экзамену (6 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий, выполнение всех контрольных работ. Оценка, полученная обучающимся по результатам работы на практических занятиях, учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Билет содержит два теоретических вопроса.

Вопросы к экзамену (6 семестр)

1. Уравнения в частных производных первого порядка. Построение общего решения линейных однородных уравнений.
2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнения к каноническому виду. Уравнение характеристик.
3. Канонические формы уравнения гиперболического типа, параболического типа, эллиптического типа в случае двух независимых переменных.

4. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Примеры краевых условий. Вывод граничных условий, описывающих упругое закрепление концов струны (стержня).
5. Свободные колебания неограниченной струны. Формула Даламбера. Свойства решений волнового уравнения на прямой.
6. Вынужденные колебания неограниченной струны.
7. Волновое уравнение на полупрямой. Метод продолжения. Однородное условие Дирихле (условие Неймана, условие 3 рода) границе $x = 0$.
8. Задача Штурма-Лиувилля, свойства ее решений. Решение задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с граничными условиями 1-го рода:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

9. Решение задачи о свободных колебаниях ограниченной струны с жестко закрепленными концами (первая краевая задача) методом Фурье. Условия существования классического решения.
10. Вынужденные колебания ограниченной струны с жестко закрепленными концами.
11. Единственность классического решения смешанной краевой задачи для волнового уравнения.
12. Вывод одномерного уравнения теплопроводности. Виды краевых условий.
13. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности на отрезке.
14. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
15. Свойства решений задачи Дирихле для уравнения теплопроводности на отрезке.
16. Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой. Интеграл Пуассона. Свойство интеграла Пуассона.
17. Функция Грина (функция источника) для уравнения теплопроводности на прямой и ее свойства.
18. Единственность классического решения уравнения теплопроводности на прямой.
19. Краевые задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой. Метод продолжения.
20. Задача на собственные значения и собственные функции с периодическими условиями.
21. Формулы Грина. Свойства гармонических функций.
22. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге и вне круга. Интеграл Пуассона.
23. Задача Неймана для уравнения Лапласа в круге.
24. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в кольце.
25. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике.
26. Условие разрешимости задачи Неймана.
27. Единственность классического решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Критерий оценивания

Оценка **«отлично»** выставляется обучающемуся, если он владеет знаниями предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину; самостоятельно, в логической последовательности и исчерпывающе отвечает на все вопросы, подчеркивает при этом самое существенное, умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделять в нем главное; устанавливать причинно-следственные связи; четко формулирует ответы.

Оценка **«хорошо»** выставляется обучающемуся, если он владеет знаниями дисциплины почти в полном объеме программы (имеются пробелы знаний только в некоторых, особенно сложных разделах); самостоятельно и отчасти при наводящих вопросах дает

полноценные ответы на вопросы; не всегда выделяет наиболее существенное, не допускает вместе с тем серьезных ошибок в ответах.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если он владеет основным объемом знаний по дисциплине; проявляет затруднения в самостоятельных ответах, оперирует неточными формулировками; в процессе ответов допускает ошибки по существу вопросов.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если он не освоил обязательного минимума знаний предмета, не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах экзаменатора.

6. Методические рекомендации обучающимся по дисциплине, в том числе для самостоятельной работы

Для успешного освоения дисциплины необходимо знание тем и основных понятий следующих дисциплин учебного плана:

- 1) *Алгебра* - приведение квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа, метод Якоби), закон инерции.
- 2) *Математический анализ* – непрерывные функции; кусочно-непрерывные функции; криволинейные координаты; замена переменных; частные производные; неявные функции; дифференцирование неявных функций, поверхностные интегралы; формула Остроградского-Гаусса; интегралы, зависящие от параметра; несобственные интегралы; функциональные ряды; признаки сходимости ряда; ряды и интегралы Фурье; кратные интегралы; производная по направлению, градиент, дивергенция, оператор Лапласа.
- 3) *Дифференциальные уравнения (Обыкновенные дифференциальные уравнения)* – методы решения уравнений первого порядка (метод разделения переменных, метод вариации произвольной постоянной), задача Коши для линейных уравнений первого и второго порядка с постоянными коэффициентами, уравнение Эйлера.
- 4) *Функциональный анализ* - собственные значения и собственные функции, линейные операторы; ортогональные системы функций; полные системы функций; пространство функций $L_2(G)$.
- 5) *Комплексный анализ (теория функций комплексного переменного)* - гармонические и аналитические функции, вычисление интегралов с помощью вычетов.
- 6) *Физика* - закон Гука, равнодействующая сил, законы Ньютона; закон сохранения энергии, закон внутренней теплопроводности в твердых телах (закон Фурье), закон конвективного теплообмена на границе двух сред (закон Ньютона), закон диффузии (закон Фика).

Задания для самопроверки к началу изучения курса

1. Найдите производную функции $y(x) = \int_0^x \sin \frac{x-\xi}{a} d\xi$.
2. Для функции $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, найдите $\text{grad } u$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
3. Для заданной скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ и векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ запишите следующие операции $\text{div}(\varphi \vec{a})$, $\text{div grad } \varphi$.
4. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y'(x) + y = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$.
5. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y''(x) + y = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

6. Найдите частные производные первого и второго порядков от следующих функций
 $u(x, y) = x \sin(x + y), \quad u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.
7. Найдите частные производных $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ от функции $u = f(\xi, \eta)$, где
 $\xi = x^2 + y^2, \quad \eta = 2xy$.
8. Докажите, что функция $u = \ln(1/r)$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
9. Докажите, что функция $u = 1/r$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.
10. Постройте выражение для оператора Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в полярных координатах.
11. Найдите коэффициенты разложения функций $u(x) = x$ и $u(x) = 1$ на отрезке $[0, 1]$ в тригонометрический ряд Фурье.
12. Найдите производную y' для функции $y(x)$, определяемой следующим уравнением
 $x^2 + 2xy - y^2 = 4$.
13. Найдите производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора r этой точки.

Методические и справочные материалы по дисциплине, план-график практических занятий и контрольных мероприятий, конспекты практических занятий, задания для самостоятельной работы, примерные варианты контрольных работ, результаты текущего контроля и материалы для подготовки к промежуточной аттестации публикуются на сайте дисциплины <http://math-it.petrSU.ru/users/semenova/UMF/index.html> (в открытом доступе).

7. Методические рекомендации преподавателям по дисциплине

Планирование лекционных и практических занятий осуществляется с учётом установленного количества часов.

Лекции составляют основу теоретического обучения и дают систематизированные основы научных знаний по дисциплине, раскрывают состояние и перспективы развития соответствующей области науки, концентрируют внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулируют их активную познавательную деятельность и способствуют формированию творческого мышления. Ведущим методом лекционного занятия выступает устное изложение учебного материала.

Практические занятия направлены на формирование у обучающихся умений решать типовые задачи. Преподаватель оценивает знания и умения обучающихся путем проведения контрольных работ и проверки домашних заданий.

7.1. Задачи для аудиторных занятий и задачи, предлагаемые для самостоятельного решения (домашнее задание)

Для проведения практических занятий рекомендуется использовать следующий задачник:

Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений. / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

№ раздела	Тема	Глава задачника	Номера задач	
			для аудиторных занятий	Для самостоятельных занятий
1	Уравнения в частных производных первого порядка. Общее решение. Решение задачи Коши	Гл. 2, § 3	11; 13 (1); 14 (1,3,5,6); 17 (1,3,7)	12; 13 (2); 14 (2,4,7); 17 (2,5)
1	Интегральные поверхности, проходящие через заданную кривую. Поверхности, ортогональные данному семейству поверхностей.	Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [3]		
		§ 20	1194, 1196, 1202, 1211	1195, 1198, 1203, 1211
2	Системы уравнений в частных производных 1-го порядка с двумя независимыми переменными	Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [3]		
		§ 20	1217, 1218	1219
3	Решение нелинейных уравнений в частных производных 1-го порядка	Задания публикуются на сайте дисциплины		
4	Решение простейших уравнений в частных производных 2-го порядка	Гл. 2, §§ 1,2	6; 7 (1,3,5,7)	7 (2,4,6,8)
4	Приведение уравнения 2-го порядка к каноническому виду. Метод характеристик			
	Приведение уравнения к каноническому виду (случай двух независимых переменных). Построение общего решения. Метод характеристик. Решение задачи Коши	Гл. 2, §§ 5, 7	33 (1,2); 34 (1,2); 35 (1,2); 36 (1); 40 (1,3,5)	33 (3); 35 (3,4); 36 (4); 40 (2,4,6)
5	Задача Штурма-Лиувилля.	Гл. 5, §§ 1; 3	23 (б,в,г,д); 25	23 (е, ж); 26
5	Краевые задачи для уравнений гиперболического типа			
	Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера	Гл. 5, § 2	13 (2,3); 14; 19 (1); 22	13 (7); 15; 19 (2)
	Краевые задачи для волнового уравнения на полупрямой. Метод продолжения			
Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа методом Фурье (однородная и неоднородная задачи)	Гл. 5, § 4	31 (2); 32 (1); 38 (5); 41 (5,8); 42	31 (3); 32 (3); 38 (7); 41 (9)	
6	Краевые задачи для уравнений параболического типа			
	Решение смешанной задачи для уравнения теплопровод-	Гл. 5, § 4	27; 28 (3); 34; 35; 38 (2);	29; 36; 46

	ности методом Фурье		41 (4); 44	
	Решение задачи Коши для уравнения параболического типа. Формула Пуассона	Гл. 5, § 6	72 (1); 73; 76	72 (2); 77
7	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа			
	Применение метода Фурье к решению краевых задач.	Гл. 5, § 4	48; 49; 54; 56(1); 59(3); 63; 64; 65	50; 55; 56(7); 60; 61; 66

7.2. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

Варианты контрольных работ и рекомендации по оцениванию контрольных заданий приведены в фонде оценочных средств.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Дисциплина полностью обеспечена учебной литературой, представленной в печатном или электронном виде. Для осуществления образовательной деятельности по дисциплине рекомендуется следующая основная и дополнительная литература.

8.1. Основная литература:

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва : Изд-во Моск. ун-та. (любой год издания).
[Электронный ресурс] http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=468275&sr=1
2. Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений. / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001. – 220 с.
3. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Москва : Наука, 1992. – 128 с.

8.2. Дополнительная литература:

1. Будаков, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будаков, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 688 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922103113.html>
[Электронный ресурс] http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=67912&sr=1
2. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – Москва : Наука, 1988. – 512 с. (любой год издания)
3. Владимиров, В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учеб. для вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 400 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922103107.html>
4. Ильин, А.М. Уравнения математической физики / А.М. Ильин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 192 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110365.html>
5. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. – Москва : Физматлит, 2009. – 400 с. (любой год издания)
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110907.html>
6. Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 256 с. [Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922105392.html>

7. Треногин, В.А. Уравнения в частных производных / В.А. Треногин, И.С. Недосекина. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 228 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114486.html>

8.3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Сайт «EqWorld. МИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»:
Методы решений уравнений с частными производными:
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/meth-pde.htm>
Книги по уравнениям с частными производными:
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
2. Пакет для математических и инженерных расчетов MathCAD
(сайт производителя <https://www.ptc.com/en/products/mathcad>)
Петрозаводский университет обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения.

Для поиска учебной и научной литературы обучающиеся используют следующие ЭБС:

- Электронная библиотека Республики Карелия <http://elibrary.karelia.ru/>
- Электронная библиотечная система «Университетская библиотека онлайн» <http://biblioclub.ru/>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента. Студенческая электронная библиотека» <http://www.studentlibrary.ru>
- другие базы данных, размещенные на сайте Научной библиотеки ПетрГУ в разделе «Электронные журналы и базы данных» <http://library.petrSU.ru/collections/bd.shtml>.

8.4. Информационное обеспечение дисциплины в системе электронного (дистанционного) обучения

Электронный ресурс, содержащий методические и справочные материалы по дисциплине размещен на образовательном портале ПетрГУ <https://edu.petrSU.ru/object/2567> (в открытом доступе).

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническая база ПетрГУ обеспечивает проведение всех видов дисциплинарной подготовки обучающихся, предусмотренных учебным планом и соответствует действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Минимально-необходимый перечень для информационно-технического и материально-технического обеспечения дисциплины:

- аудитория для проведения лекционных и практических занятий, оснащенная рабочими местами для обучающихся и преподавателя, доской, мультимедийным оборудованием;
- библиотека с читальным залом и залом для самостоятельной работы обучающегося, оснащенная компьютером с выходом в Интернет, книжный фонд которой составляет специализированная научная, учебная и методическая литература, журналы (в печатном или электронном виде).