

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Петрозаводский государственный университет

Институт математики и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

_____ К.Г. Тарасов

«___» _____ 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Направление подготовки бакалавриата
01.03.01 Математика

Профиль направления подготовки бакалавриата
«Математика в образовании, фундаментальных
и прикладных исследованиях»

Форма обучения *очная*

Петрозаводск
2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с ФГОС ВО, утвержденным приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 10.01.2018 г. № 8 (с изменениями от 08.02.2021 № 83, от 26.11.2020 № 1456), и учебным планом по направлению подготовки бакалавриата 01.03.01 Математика (профиль «Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях»).

Разработчик:

Семёнова Елена Евгеньевна, доцент кафедры прикладной математики и кибернетики Института математики и информационных технологий ПетрГУ, к.ф.-м.н., доцент

Эксперт:

Родченкова Наталья Ивановна, старший научный сотрудник лаборатории моделирования природно-технических систем Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН, руководитель службы научных коммуникаций КарНЦ РАН, к.ф.-м.н.

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и одобрена на заседании кафедры *прикладной математики и кибернетики*

Протокол № ____ от «____» _____ 2022 г.

И.о. заведующего кафедрой _____ (к.ф.-м.н., доцент, Пешкова И.В.)

СОГЛАСОВАНО:

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и утверждена на заседании учебно-методической комиссии Института *математики и информационных технологий*

Протокол № 4 от «06» июня 2022 г.

Директор института _____ (к.ф.-м.н., доцент, Светова Н.Ю.)

Начальник методического отдела
учебно-методического управления ПетрГУ _____ И.В. Маханькова

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) бакалавриата

1.1. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины и индикаторы достижения компетенций:

Код компетенции. Этап формирования компетенции	Формулировка компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 (основной)	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>ОПК-1.1. Знает основные понятия и методы фундаментальных математических дисциплин.</p> <p>ОПК-1.2. Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности.</p> <p>ОПК-1.3. Умеет осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.</p>
ОПК-2 (основной)	Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	<p>ОПК-2.1. Знает основные задачи и области применения методов математического моделирования, основные принципы математического моделирования, методы построения и анализа математических моделей.</p> <p>ОПК-2.2. Умеет применять методы математического моделирования к решению конкретных задач из различных областей естествознания, техники, экономики и управления; выбирать методы исследования математических моделей; строить и исследовать математические модели.</p> <p>ОПК-2.3. Владеет навыками применения математического аппарата к исследуемым моделям.</p>

1.2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- классификацию уравнений в частных производных, основные краевые задачи для уравнений математической физики (волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения диффузии, уравнений Лапласа и Пуассона), понятия классического и обобщенного решений краевых задач, стандартные приемы и методы преобразования и решения краевых задач;
- теоремы существования и единственности решения краевых задач; свойства гармонических функций; свойства решений краевых задач.

Уметь:

- определять тип уравнения с частными производными, давать постановки краевых задач, применять стандартные методы преобразования и решения краевых задач

(метод характеристик, метод разделения переменных (метод Фурье), метод продолжения, метод функций Грина);

- уметь выводить волновое уравнение, уравнения теплопроводности и диффузии; исследовать корректность основных краевых задач;
- доказывать существование классического решения краевой задачи; использовать принцип максимума для обоснования единственности решения первой краевой задачи для уравнений эллиптического и параболического типов.

Владеть навыками (опытом деятельности):

- методами определения корректности начально-краевых задач для основных типов линейных уравнений второго порядка; методами вывода уравнений на основе физических законов.
- построения в явном виде решений краевых задач; использования аппарата и основных методов теории уравнений с частными производными в различных приложениях.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата и язык преподавания

Дисциплина «Уравнения с частными производными» входит в обязательную часть учебного плана основной образовательной программы бакалавриата по данному направлению подготовки и является обязательной для изучения.

Согласно учебному плану дисциплина проводится в 5 и 6 семестрах.

Изучение дисциплины опирается на знания, умения и навыки, приобретенные при освоении образовательной программы предыдущего уровня, а также при изучении дисциплин учебного плана данной образовательной программы: *Алгебра, Математический анализ, Дифференциальные уравнения (обыкновенные дифференциальные уравнения), Функциональный анализ, Комплексный анализ, Физика.*

Знания, полученные при изучении дисциплины, необходимы для успешного освоения таких дисциплины, как *Численные методы*, а также при выполнении научно-исследовательской работы в области математического моделирования физических, биологических, экологических, экономических, социальных и других процессов живой и неживой природы.

Язык преподавания – русский.

3. Виды учебной работы и тематическое содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц или 252 академических часа.

3.1. Виды учебной работы

Виды учебной работы	Объем в академических часах
Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану	252
В том числе:	
Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), всего	120
В том числе:	
Лекции (Л)	60
Практические занятия (Пр)	60
Лабораторные занятия (Лаб)	0
Вид промежуточной аттестации	Зачет (5 семестр), Экзамен (6 семестр)

Самостоятельная работа обучающихся (СР) (всего)	132
В том числе: Самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовка к занятиям. Подготовка к промежуточной аттестации	

3.2. Краткое содержание дисциплины по разделам и видам учебной работы

№ п/п	Раздел дисциплины (тематический модуль)	Трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)					Оценочное средство
		Всего	Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа обучающихся	
Семестр № 5							
1	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка	16	4	6		6	Контрольная работа, зачет, экзамен
2	Классификация уравнений в частных производных и их преобразование	19	4	8		7	Контрольная работа, зачет, экзамен
3	Основные уравнения математической физики и постановка краевых задач	17	5	4		8	Зачет, экзамен
4	Задача на собственные значения и собственные функции	13	4	2		7	Контрольная работа, Зачет, экзамен
5	Краевые задачи для уравнений гиперболического типа	43	13	10		20	Контрольная работа, зачет, экзамен
Вид промежуточной аттестации в семестре - зачет							
Всего, 5 семестр		108	30	30		48	
Семестр № 6							
6	Краевые задачи для уравнений параболического типа	46	12	14		20	Контрольная работа, экзамен
7	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	34	12	8		14	Контрольная работа, экзамен
8	Специальные функции в задачах математической физики	16	4	4		8	Экзамен

9	Нелинейные уравнения математической физики	12	2	4		6	Экзамен
	Вид промежуточной аттестации в семестре – экзамен	36				36	
Всего, 6 семестр		144	30	30		84	
Итого:		252	60	60		132	

3.3. Содержание аудиторных занятий

Содержание лекционных занятий

№ раздела	№ лекции	Основное содержание	Количество часов	В т.ч. с использованием ДЮТ (*)
Семестр № 5				
1	1.1	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Линейные однородные уравнения.	2	
1	1.2	Квазилинейные уравнения. Уравнение переноса вещества потоком воздуха	2	
2	2.1	Классификация уравнений с двумя независимыми переменными. Приведение уравнения с двумя независимыми переменными к каноническому виду. Метод характеристик.	2	
2	2.2	Классификация уравнений в случае n ($n > 2$) независимых переменных. Приведение уравнения к каноническому виду. Канонические формы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.	2	
3	3.1	Основные уравнения математической физики и постановка начально-краевых задач. Понятие корректно поставленной задачи.	1	
3	3.2	Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка задач Коши. Классификация граничных условий. Смешанная задача для волнового уравнения. Примеры задач, сводящиеся к решению волнового уравнения.	2	
3	3.3	Вывод уравнения диффузии. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задачи Коши. Виды граничных условий. Постановка смешанных краевых задач.	2	
4	4.1	Первая и вторая формул Грина. Постановка задачи на собственные значения и собственные функции. Свойства собственных значений (вещественность) и собственных функций (ортогональность). Разложение функции в ряд по собственным функциям.	2	
4	4.2	Задача Штурма–Лиувилля. Простейшие задачи Штурма–Лиувилля. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике.	2	

5	5.1	Задача Коши для волнового уравнения на прямой. Формула Даламбера. Свойства решений задачи Коши.	3	
5	5.2	Колебания в неограниченном пространстве. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Метод спуска. Физическая интерпретация формулы Пуассона.	2	
5	5.3	Краевые задачи на полупрямой. Метод продолжений.	2	
5	5.4	Постановка начально-краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области. Существование классического решения. Свободные и вынужденные колебания ограниченной струны. Решение смешанной задачи методом Фурье. Краевые задачи с неоднородными граничными условиями.	4	
5	5.5	Свободные колебания прямоугольной мембраны, круглой мембраны	2	
			Всего, 5 семестр	30
Семестр № 6				
6	6.1	Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле. Решение смешанной задачи методом Фурье. Функция Грина. Смешанная задача для неоднородного уравнения теплопроводности.	4	
6	6.2	Задача Коши для уравнения теплопроводности. Свойства решений задачи Коши (единственность, устойчивость). Фундаментальное решение (Функция Грина). Интеграл Пуассона. Свойства фундаментального решения и его физический смысл. Неоднородное уравнение теплопроводности на прямой.	4	
6	6.3	Начальная задача для уравнения теплопроводности в пространстве. Многомерное преобразование Фурье.	2	
6	6.4	Уравнение теплопроводности на полупрямой с условиями 1-го рода (условия Дирихле), 2-го рода (условия Неймана), 3-го рода. Метод продолжения. Функции Грина краевых задач на полупрямой.	2	
7	7.1	Оператор Лапласа в криволинейных системах координат. Фундаментальные решения оператора Лапласа в пространстве и на плоскости. Гармонические функции. Формулы Грина. Свойства гармонических функций. Теорема о среднем значении гармонической функции. Принцип максимума.	2	
7	7.2	Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле.	2	
7	7.3	Решение краевых задач для уравнения Лапласа в круге и вне круга. Формула Пуассона. Краевые задачи для уравнения Лапласа в кольце и прямоугольной области.	4	
7	7.4	Метод функций Грина. Функции Грина краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина первой и второй краевой задачи для уравнения Пуассона. Функция Грина задачи Дирихле для шара и круга.	4	
8	8.1	Функции Бесселя. Уравнение Бесселя. Ортогональность функций Бесселя. Задача о колебании нити, подвешенной за один конец. Задача о распространении тепла в круглой пластине	4	
9	9.1	Нелинейные уравнения математической физики. Точные методы решения.	1	

9	9.2	Методы обобщенного и функционального разделения переменных.	1	
			Всего, 6 семестр	30
			Всего:	60

Содержание практических занятий

№ раздела	№ занятия	Основное содержание	Количество	В т.ч. с использованием ЛОТ (*)
			часов	
Семестр № 5				
1	1.1	Решение простейших уравнений в частных производных	2	
1	2.1 2.2	Уравнения в частных производных первого порядка. Общее решение. Решение задачи Коши. <i>Контрольная работа № 1.</i>	4	
2	2.3 2.4	Приведение уравнения к каноническому виду (случай двух независимых переменных). Построение общего решения. Метод характеристик. Решение задачи Коши	4	
2	2.5	Приведение уравнения к каноническому виду (случай n независимых переменных, $n > 2$)	2	
2	2.6	<i>Контрольная работа № 2.</i> Канонический вид уравнений в частных производных. Метод характеристик	2	
3	3.1 3.2	Построение математических моделей физических процессов. Постановка краевых задач	4	
4	4.1	Задача Штурма–Лиувилля. Свойства собственных функций. Разложение функций в ряд по собственным функциям.	2	
5	5.1	Решение задачи Коши для волнового уравнения. Метод характеристик. Формула Даламбера	2	
5	5.2	Краевые задачи для волнового уравнения на полупрямой. Метод продолжения	2	
5	5.3	Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа методом Фурье (однородная и неоднородная задачи)	6	
			Всего, 5 семестр	30
Семестр № 6				
6	6.1 -3	Решение смешанных краевых задач для уравнений параболического типа. Метод Фурье	6	
6	6.4	Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона	2	
6	6.5 6.6	δ -функция (функция Дирака) и ее свойства. Построение функции источника. Температурное поле, создаваемое точечным источником тепла.	4	
6	6.7	<i>Контрольная работа № 4.</i> Решение краевых задач для уравнения параболического типа	2	
7	7.1	Свойства гармонических функций. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона	2	
7	7.2 7.3	Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона методом Фурье	4	
7	7.4	<i>Контрольная работа № 5.</i> Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона	2	
8	8.1	Специальные функции в задачах математической физики	4	

9	9.1	Нелинейные уравнения математической физики	4
		Всего, 6 семестр	30
		Итого:	60

3.4. Организация самостоятельной работы обучающегося

Виды самостоятельной работы	Трудоемкость в час.
Самостоятельная проработка курса лекций при подготовке к практическим занятиям, работа с литературой	9
Выполнение домашних заданий (в том числе заданий, решаемых с помощью систем компьютерной математики). Номера заданий из сборника задач [2] из списка основной литературы указывает преподаватель на практических занятиях (задания публикуются на сайте дисциплины https://edu.petrstu.ru/object/2567 в разделе «Тематика практических занятий и задания для самостоятельной работы»).	26
Подготовка к контрольной работе № 1. Решение примерного варианта работы (см. п. 5.1)	2
Подготовка к контрольной работе № 2. Решение примерного варианта работы (см. п. 5.1)	2
<i>Контрольная работа № 3.</i> Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа	2
Подготовка и сдача зачета (подготовка ответов на вопросы, список которых приводится в п. 5.2)	7
Всего, 5 семестр	48
Самостоятельная проработка курса лекций при подготовке к практическим занятиям, работа с литературой	14
Выполнение домашних заданий (в том числе заданий, решаемых с помощью систем компьютерной математики). Номера заданий из сборника задач [2] из списка основной литературы указывает преподаватель на практических занятиях (задания публикуются на сайте дисциплины https://edu.petrstu.ru/object/2567 в разделе «Тематика практических занятий и задания для самостоятельной работы»).	30
Подготовка к контрольной работе № 4. Решение примерного варианта работы (см. п. 5.1)	2
Подготовка к контрольной работе № 5. Решение примерного варианта работы (см. п. 5.1)	2
Подготовка к экзамену, сдача экзамена (подготовка ответов на вопросы, список которых приводится в п. 5.2)	36
Всего, 6 семестр	84
Всего за год	132

4. Образовательные технологии по дисциплине

При изучении дисциплины «Уравнения с частными производными» используются следующие образовательные технологии:

- аудиторные занятия (лекционные и практические занятия);
- внеаудиторные занятия (самостоятельная работа, индивидуальные консультации).

Предусматривается использование в учебном процессе следующих активных и интерактивных форм проведения занятий:

- практические занятия в диалоговом режиме;

– решение задач с помощью систем компьютерной математики.

Учебно-методические материалы публикуются на сайте дисциплины:

<http://math-it.petsu.ru/users/semnova/UMF/index.html>

<https://edu.petsu.ru/object/2567>

5. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

5.1. Текущий контроль осуществляется преподавателем дисциплины с помощью *устного опроса* на практических занятиях, при проведении занятий в форме *контрольной работы*, а также проверки выполнения *домашних заданий*. К оценочным средствам для текущего контроля относятся:

- аудиторные контрольные работы,
- домашние контрольные работы.

Примеры вариантов контрольных работ, критерии оценивания

Контрольная работа № 1 (аудиторная)

Простейшие уравнения в частных производных

Постройте общее решение уравнений:

$$1) \quad u_{xy} - u_x = xy; \quad 2) \quad xu_x + \sqrt{1-y^2} \cdot u_y = y.$$

Критерий оценивания.

«Зачтено» выставляется, если выполнены оба задания, иначе – «не зачтено».

Контрольная работа № 2 (аудиторная)

Канонический вид уравнений в частных производных. Метод характеристик

1. (2 балла). Укажите области на плоскости Oxy , где сохраняется тип уравнения:

$$(\cos^2 x + \sin^2 y)u_{xx} - 4(\cos x + \sin y)u_{xy} + 4u_{yy} - e^y u_x + 5u = 0.$$

2. (10 баллов). Решите задачу Коши:

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0,$$

$$u(x, \cos x) = 0, \quad u_y(x, \cos x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos x.$$

Критерий оценивания. В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом: 11–12 баллов – «отлично», 9–10 – «хорошо», 6–8 – «удовлетворительно», менее 6 баллов – «неудовлетворительно»

Контрольная работа № 3 (домашняя)

Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа

(10 баллов). В области $0 < x < 1, t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 8u_x - 4u_t + e^x \sin \pi x = 4(1 + x - 2t),$$

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = e^x \sin 4\pi x + 1 - x.$$

Критерий оценивания. В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом: 9–10 баллов – «отлично», 7–8 – «хорошо», 4–6 – «удовлетворительно»,

менее 4 баллов – «неудовлетворительно».

Контрольная работа № 4 (аудиторная)

Решение смешанной задачи для уравнения параболического типа

Для смешанной краевой задачи, рассматриваемой в области $0 \leq x \leq 1, t \geq 0$

$$u_t = 4u_{xx} - 4(t - 1) + \cos 3\pi x + \frac{x^2}{2},$$

$$u_x(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = t,$$

$$u(x, 0) = x - \frac{x^2}{2} + \cos \pi x.$$

- 1) (4 балла). Постройте и решите соответствующую задачу Штурма–Лиувилля.
- 2) (4 балла). Постройте решение методом Фурье.

Критерий оценивания. В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом: 7–8 баллов – «отлично», 5–6 – «хорошо», 3–4 – «удовлетворительно», менее 3 баллов – «неудовлетворительно».

Контрольная работа № 5 (аудиторная)

Краевые задачи для уравнения Лапласа

1. (1 балл). Найдите гармоническую функцию $u(x, y)$ в круге радиуса $R = 2$, удовлетворяющую на границе области условию Дирихле

$$u(x, y)|_{x^2+y^2=4} = (x^2 + y^2)^2.$$

2. (2 балла). При каких значениях параметров A и B краевая задача

$$\Delta u(r, \varphi) = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\frac{\partial u(2, \varphi)}{\partial r} = Ax^2 - By^2 + y, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

имеет решение?

3. (3 балла). Найдите решение $u = u(r, \varphi)$ уравнения Лапласа в кольце $1 \leq r \leq 2$, удовлетворяющее на его границе следующим условиям:

$$u(1, \varphi) = 1, \quad u_r(2, \varphi) = \cos 2\varphi.$$

Критерий оценивания. В зависимости от полученных баллов работа оценивается следующим образом: 5–6 баллов – «отлично», 4 – «хорошо», 3 – «удовлетворительно», менее 3 баллов – «неудовлетворительно».

5.2. Промежуточная аттестация проводится в виде зачета и экзамена.

Условием получения зачета (5 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий; выполнение заданий, предлагаемых в рамках самостоятельной работы, выполнение контрольных работ.

Вопросы к зачету (5 семестр)

1. Уравнения в частных производных первого порядка. Построение общего решения линейных однородных уравнений.
2. Уравнения в частных производных первого порядка. Построение общего решения линейных неоднородных и квазилинейных уравнений.
3. Уравнение переноса вещества потоком воздуха.
4. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Канонические формы уравнений с постоянными коэффициентами.
5. Приведение уравнения к каноническому виду. Уравнение характеристик.
6. Канонический вид уравнения гиперболического типа.
7. Канонический вид уравнения параболического типа.
8. Канонический вид уравнения эллиптического типа.
9. Канонический вид уравнений второго порядка с n независимыми переменными.
10. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка краевых условий. Вывод граничных условий, описывающих упругое закрепление концов струны (стержня).
11. Модель динамики концентрации вещества в трубке.
12. Модель распространения тепла в изотропном теле.
13. Свободные колебания неограниченной струны. Формула Даламбера. Некоторые свойства решений волнового уравнения на прямой, определяемые свойствами начальных функций (начальных данных).
14. Вынужденные колебания неограниченной струны.
15. Волновое уравнение на полупрямой. Однородное условие Дирихле (условие Неймана, условие 3 рода) границе $x=0$.
16. Решение задачи о свободных колебаниях ограниченной струны методом Фурье. Условия существования классического решения.
17. Вынужденные колебания ограниченной струны.
18. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных чисел и собственных функций. Свойство ортогональности собственных функций.
19. Вывод уравнения распространения тепла в стержне. Постановка краевых задач.
20. Вывод граничных условий на концах стержня, описывающих режим конвективного теплообмена со средой заданной температуры.
21. Первая и вторая формулы Грина.
22. Третья формула Грина (интегральное представление значения функции в точке, $n=3$).
23. Третья формула Грина (интегральное представление значения функции в точке, $n=2$).
24. Задача Штурма-Лиувилля. Одномерный случай. Периодические граничные условия:
$$X''(x)+cX(x)=0, 0<x<L, X(x)=X(x+L).$$
30. Задача Штурма-Лиувилля. Одномерный случай. Однородные смешанные условия:
$$X''(x)+cX(x)=0, 0<x<L, X'(0)-hX(0)=X(L)=0.$$
31. Задача Штурма-Лиувилля, одномерный случай: $X''(x)+cX(x)=0, 0<x<L, X(0)=X'(L)=0$.
32. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа на плоскости.

Критерий оценивания

«Зачтено» выставляется обучающемуся, если он показал достаточно прочные знания основных положений учебной дисциплины, умение самостоятельно решать конкрет-

ные практические задачи, предусмотренные рабочей программой, ориентироваться в рекомендованной справочной литературе, умеет правильно оценить полученные результаты.

«Не зачтено» выставляется обучающемуся, если при ответе выявились существенные пробелы в знаниях основных положений учебной дисциплины, неумение с помощью преподавателя получить правильное решение конкретной практической задачи из числа предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

Условием допуска к экзамену (6 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий, выполнение всех контрольных работ. Оценка, полученная обучающимся по результатам работы на практических занятиях, учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Билет содержит два теоретических вопроса.

Вопросы к экзамену (6 семестр)

1. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Классификация и постановка краевых задач.
2. Модель диффузии вещества в трубке.
3. Задача Коши для волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$ на прямой.
4. Свойства решений задачи Штурма-Лиувилля вида :

$$X''(x)+cX(x)=0, \quad 0 < x < l, \quad a_1X'(0)+b_1X(0)=a_2X'(l)+b_2X(l)=0.$$

5. Общая схема метода разделения переменных (метод Фурье).
6. Вывод уравнения распространения тепла в стержне. Постановка краевых задач.
7. Вывод граничных условий на концах стержня, описывающих режим конвективного теплообмена со средой заданной температуры.
8. Распространение тепла в неограниченном стержне. Построение решения с помощью метода разделения переменных (интеграл Фурье).
9. Представление решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой с помощью интеграла Пуассона.
10. Свойства решений задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.
11. Физический смысл фундаментального решения уравнения теплопроводности на прямой (функция Грина).
12. Неоднородное уравнение теплопроводности на прямой.
13. Понятие точечного источника тепла. Функция Дирака. Решение задачи Коши, учитывающей действие точечного источника.
14. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Однородные граничные условия общего вида. Решение краевых задач на полупрямой методом продолжения (общая схема).
15. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Условие Дирихле на границе $x=0$.
16. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Условие Неймана на границе $x=0$.
17. Уравнение теплопроводности на полупрямой с граничным условием 3-го рода на границе $x=0$.
18. Решение однородного уравнения теплопроводности на отрезке $[0,l]$ с граничными условиями Дирихле методом Фурье.
19. Смешанная задача для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с граничными условиями, описывающими теплообмен на концах отрезка со средой нулевой температуры.
20. Решение неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке $[0,l]$ с граничными условиями Дирихле методом Фурье.
21. Преобразование краевых задач с неоднородными граничными условиями.
22. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в круге (внутренняя задача Дирихле).
23. Первая краевая задача для уравнения Лапласа вне круга (внешняя краевая задача Дирихле).

24. Представление решения задачи Дирихле в круге с помощью интеграла Пуассона.
25. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике.
26. Свойства гармонических функций.
27. Единственность и устойчивость решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
28. Условие разрешимости задачи Неймана.
29. Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в круге.
30. Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в кольце.
31. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе.
32. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в кольцевом секторе.
33. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
34. Функция Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона.
35. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона в шаре.
36. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в кольце.

Критерий оценивания

Оценка **«отлично»** выставляется обучающемуся, если он владеет знаниями предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину; самостоятельно, в логической последовательности и исчерпывающе отвечает на все вопросы, подчеркивает при этом самое существенное, умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделять в нем главное: устанавливать причинно-следственные связи; четко формулирует ответы.

Оценка **«хорошо»** выставляется обучающемуся, если он владеет знаниями дисциплины почти в полном объеме программы (имеются пробелы знаний только в некоторых, особенно сложных разделах); самостоятельно и отчасти при наводящих вопросах дает полноценные ответы на вопросы; не всегда выделяет наиболее существенное, не допускает вместе с тем серьезных ошибок в ответах.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если он владеет основным объемом знаний по дисциплине; проявляет затруднения в самостоятельных ответах, оперирует неточными формулировками; в процессе ответов допускает ошибки по существу вопросов.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если он не освоил обязательного минимума знаний предмета, не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах экзаменатора.

6. Методические рекомендации обучающимся по дисциплине, в том числе для самостоятельной работы

Для успешного освоения дисциплины необходимо знание тем и основных понятий следующих дисциплин учебного плана:

- 1) *Алгебра* - приведение квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа, метод Якоби), закон инерции.
- 2) *Математический анализ* – непрерывные функции; кусочно-непрерывные функции; криволинейные координаты; замена переменных; частные производные; неявные функции; дифференцирование неявных функций, поверхностные интегралы; формула Остроградского-Гаусса; интегралы, зависящие от параметра; несобственные интегралы; функциональные ряды; признаки сходимости ряда; ряды и интегралы Фурье; кратные интегралы; производная по направлению, градиент, дивергенция, оператор Лапласа.
- 3) *Дифференциальные уравнения (Обыкновенные дифференциальные уравнения)* – методы решения уравнений первого порядка (метод разделения переменных, метод ва-

риации произвольной постоянной), задача Коши для линейных уравнений первого и второго порядка с постоянными коэффициентами, уравнение Эйлера.

- 4) *Функциональный анализ* - собственные значения и собственные функции, линейные операторы; ортогональные системы функций; полные системы функций; пространство функций $L_2(G)$.
- 5) *Комплексный анализ (теория функций комплексного переменного)* - гармонические и аналитические функции, вычисление интегралов с помощью вычетов.
- 6) *Физика* - закон Гука, равнодействующая сил, законы Ньютона; закон сохранения энергии, закон внутренней теплопроводности в твердых телах (закон Фурье), закон конвективного теплообмена на границе двух сред (закон Ньютона), закон диффузии (закон Нернста).

Задания для самопроверки к началу изучения курса

1. Найдите производную функции $y(x) = \int_0^x \sin \frac{x-\xi}{a} d\xi$.
2. Для функции $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, найдите $\text{grad } u$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
3. Для заданной скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ и векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ запишите следующие операции $\text{div}(\varphi \vec{a})$, $\text{div grad } \varphi$.
4. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y'(x) + y = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$.
5. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y''(x) + y = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.
6. Найдите частные производные первого и второго порядков от следующих функций $u(x, y) = x \sin(x + y)$, $u(x, y) = \text{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.
7. Найдите частные производных $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ от функции $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = 2xy$.
8. Докажите, что функция $u = \ln(1/r)$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
9. Докажите, что функция $u = 1/r$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.
10. Постройте выражение для оператора Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в полярных координатах.
11. Найдите коэффициенты разложения функций $u(x) = x$ и $u(x) = 1$ на отрезке $[0, 1]$ в тригонометрический ряд Фурье.
12. Найдите производную y' для функции $y(x)$, определяемой следующим уравнением $x^2 + 2xy - y^2 = 4$.
13. Найдите производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора r этой точки.

Методические и справочные материалы по дисциплине, план-график практических занятий и контрольных мероприятий, конспекты практических занятий, задания для само-

стоятельной работы, примерные варианты контрольных работ, результаты текущего контроля и материалы для подготовки к промежуточной аттестации публикуются на сайте дисциплины <http://math-it.petsu.ru/users/semenova/UMF/index.html> (в открытом доступе).

7. Методические рекомендации преподавателям по дисциплине

Планирование лекционных и практических занятий осуществляется с учётом установленного количества часов.

Лекции составляют основу теоретического обучения и дают систематизированные основы научных знаний по дисциплине, раскрывают состояние и перспективы развития соответствующей области науки, концентрируют внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулируют их активную познавательную деятельность и способствуют формированию творческого мышления. Ведущим методом лекционного занятия выступает устное изложение учебного материала.

Практические занятия направлены на формирование у обучающихся умений решать типовые задачи. Преподаватель оценивает знания и умения обучающихся путем проведения контрольных работ и проверки домашних заданий.

7.1. Задачи для аудиторных занятий и задачи, предлагаемые для самостоятельного решения (домашнее задание)

Для проведения практических занятий рекомендуется использовать следующий задачник: *Уравнения математической физики. Сборник примеров и упражнений.* / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

№ раз-дела	Тема	Глава задачника	Номера задач	
			для аудиторных занятий	Для самостоятельных занятий
1	Классификация уравнений в частных производных. Решение простейших уравнений в частных производных	Гл. 2, §§ 1,2	1; 2; 3; 6; 7 (1,3,5,7)	7 (2,4,6,8); 8 (2)
1	Уравнения в частных производных первого порядка. Общее решение. Решение задачи Коши	Гл. 2, § 3	11; 13 (1); 14 (1,3,5,6); 15 (3,4); 17 (1,3,7); 18 (2); 19	12; 13 (2); 14 (2,4,7); 15 (1,2); 16; 17 (2,5); 18 (4); 20
2	Приведение уравнения к каноническому виду. Метод характеристик			
	Приведение уравнения к каноническому виду (случай двух независимых переменных). Построение общего решения. Метод характеристик. Решение задачи Коши	Гл. 2, §§ 5, 7	33 (1,2); 34 (1,2); 35 (1,2); 36 (1); 40 (1,3,5)	33 (3); 35 (3,4); 36 (4); 40 (2,4,6)
	Приведение уравнения к каноническому виду (случай n независимых переменных, $n > 2$)	Гл. 2, § 6	37 (1); 38 (1; 4)	37 (3); 38 (2,6)
3	Построение математических моделей физических процессов. Постановка краевых задач	Гл. 3, §§ 1; 2	1; 4; 9; 12; 15; 16	3; 6; 13; 17
4	Задача Штурма-Лиувилля.	Гл. 5, §§ 1;	3; 5; 7 (1; 2);	7 (3-8); 10; 12;

	Свойства собственных функций. Преобразование краевых задач	3	9; 11; 23 (б,в,г,д); 25	23 (е, ж); 26
5	Краевые задачи для уравнений гиперболического типа			
	Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера	Гл. 5, § 2	13 (2,3); 14; 19 (1); 22	13 (7); 15; 19 (2)
	Краевые задачи для волнового уравнения на полупрямой. Метод продолжения			
	Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа методом Фурье (однородная и неоднородная задачи)	Гл. 5, § 4	31 (2); 32 (1); 38 (5); 41 (5,8); 42	31 (3); 32 (3); 38 (7); 41 (9)
Распространение волн в пространстве	Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики». М.: Изд-во Моск. Унта, 2004. Задачи к главе V.			
6	Краевые задачи для уравнений параболического типа			
	Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье	Гл. 5, § 4	27; 28 (3); 34; 35; 38 (2); 41 (4); 44	29; 36; 46
	Решение задачи Коши для уравнения параболического типа. Формула Пуассона	Гл. 5, § 6	72 (1); 73; 76	72 (2); 77
	δ -функция (функция Дирака) и ее свойства. Построение функции источника. Температурное поле, создаваемое точечным источником тепла.	Будак Б.М. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1972. Гл. III, § 3; Гл. V, § 3		
7	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа			
	Свойства гармонических функций. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона	Гл. 4, §§ 1,2	1(в); 4; 5(1); 6(2); 7 (4); 8 (2); 9 (1); 12 (2); 13 (1); 14	4(2); 7(3); 8(1); 9(2); 10(3); 12 (3); 13(3)
	Применение метода Фурье к решению краевых задач.	Гл. 5, § 4	48; 49; 54; 56(1); 59(3); 63; 64; 65	50; 55; 56(7); 60; 61; 66
*	Решение уравнений в частных производных с помощью метода интегральных преобразований Лапласа	Гл. 1, §§ 1,2	1; 2; 3 (нечетные); 4; 5 (1); 6(а); 8 (1-7,10); 9; 11 (1)	3 (четные); 5(2); 6(б); 7; 8(8,9); 10; 11(2)
		Гл. 5, § 5	68 (1; 4)	68 (2;5)

8	Специальные функции в задачах математической физики	Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физике. М.: Наука, 1985. Глава 5, § 2
9	Нелинейные задачи математической физики	Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005.

7.2. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

Варианты контрольных работ и рекомендации по оцениванию контрольных заданий приведены в фонде оценочных средств.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Дисциплина полностью обеспечена учебной литературой, представленной в печатном или электронном виде. Для осуществления образовательной деятельности по дисциплине рекомендуется следующая основная и дополнительная литература.

8.1. Основная литература:

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва : Изд-во Моск. ун-та. (любой год издания).
[Электронный ресурс] http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=468275&sr=1
2. Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений. / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001. – 220 с.

8.2. Дополнительная литература:

1. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 688 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922103113.html>
[Электронный ресурс] http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=67912&sr=1
2. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – Москва : Наука, 1988. – 512 с. (любой год издания)
3. Владимиров, В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учеб. для вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 400 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922103107.html>
4. Ильин, А.М. Уравнения математической физики / А.М. Ильин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 192 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110365.html>
5. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. – Москва : Физматлит, 2009. – 400 с. (любой год издания)
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110907.html>
6. Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 256 с. [Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922105392.html>
7. Треногин, В.А. Уравнения в частных производных / В.А. Треногин, И.С. Недосекина. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 228 с.
[Электронный ресурс] <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114486.html>

8.3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Сайт «EqWorld. МИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»:

Методы решений уравнений с частными производными:

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/meth-pde.htm>

Книги по уравнениям с частными производными:

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>

2. Пакет для математических и инженерных расчетов MathCAD

(сайт производителя <https://www.ptc.com/en/products/mathcad>)

Петрозаводский университет обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения.

3. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека онлайн»

<http://biblioclub.ru/>

4. Электронной библиотечной системы «Консультант студента. Студенческая электронная библиотека»

<http://www.studentlibrary.ru>

8.4. Информационное обеспечение дисциплины в системе электронного (дистанционного) обучения

Электронный ресурс, содержащий методические и справочные материалы по дисциплине размещен на образовательном портале ПерГУ <https://edu.petrSU.ru/object/2567> (в открытом доступе).

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническая база ПетрГУ обеспечивает проведение всех видов дисциплинарной подготовки обучающихся, предусмотренных учебным планом и соответствует действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Минимально-необходимый перечень для информационно-технического и материально-технического обеспечения дисциплины:

- аудитория для проведения лекционных и практических занятий, оснащенная рабочими местами для обучающихся и преподавателя, доской, мультимедийным оборудованием;
- библиотека с читальным залом и залом для самостоятельной работы обучающегося, оснащенная компьютером с выходом в Интернет, книжный фонд которой составляет специализированная научная, учебная и методическая литература, журналы (в печатном или электронном виде).

Дата: 5 мая 2022 г.