МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Петрозаводский государственный университет

Институт математики и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

______________ К.Г. Тарасов

«____» ________ 2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Направление подготовки бакалавриата
01.03.01 Математика

Профиль направления подготовки бакалавриата
Общий

Форма обучения *очная*

Петрозаводск
2018

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с ФГОС ВО, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 07.08.2014 г. № 943 и учебным планом по направлению подготовки бакалавриата 01.03.01 - Математика (профиль - *общий*).

Разработчик:

Семёнова Елена Евгеньевна, доцент кафедры прикладной математики и кибернетики института математики и информационных технологий ПетрГУ, к.ф.-м.н., доцент

____

(подпись)

Эксперт:

Родченкова Наталья Ивановна, старший научный сотрудник лаборатории моделирования природно-технических систем Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН, руководитель службы научных коммуникаций КарНЦ РАН, к.ф.-м.н.

____

(подпись)

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и одобрена на заседании кафедры *прикладной математики и кибернетики*

Протокол № ____ от «____» июня 2018 г.

Заведующий кафедрой ______________________________ (к.ф.-м.н., доцент, Пешкова И.В.)

(подпись)

СОГЛАСОВАНО:

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и утверждена на заседании учебно-методической комиссии института *математики и информационных технологий*
Протокол № __________ от «______» ___________ 2018 г.

Директор института ________________________________ (к.ф.-м.н., доцент, Светова Н.Ю.)

(подпись)

Начальник методического отдела
учебно-методического управления ПетрГУ ___________________________ И.В. Маханькова

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) бакалавриата

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

Код компетенции. Этап формирования компетенции	**Формулировка компетенции**	**Планируемые результаты обучения** (индикаторы достижения компетенции)
ОПК-1 (основной)	Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, дифференциальных уравнений в будущей профессиональной деятельности. (частично)	***Знать:*** классификацию уравнений в частных производных, основные краевые задачи для уравнений математической физики (волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения диффузии, уравнений Лапласа и Пуассона), понятия классического и обобщенного решений краевых задач, стандартные приемы и методы преобразования и решения краевых задач. ***Уметь*:** определять тип уравнения с частными производными, давать постановки краевых задач, применять стандартные методы преобразования и решения краевых задач (метод характеристик, метод разделения переменных (метод Фурье), метод продолжения, метод функций Грина). ***Владеть*** *навыками (опытом деятельности):* построения в явном виде решений краевых задач; использования аппарата и основных методов теории уравнений с частными производными в различных приложениях.
ПК-2 (основной)	Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	***Знать***: постановки основных краевых задач для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов. ***Уметь***: уметь выводить волновое уравнение, уравнения теплопроводности и диффузии; исследовать корректность основных краевых задач; ***Владеть***: методами определения корректности начально-краевых задач для основных типов линейных уравнений второго порядка; методами вывода уравнений на основе физических законов.
ПК-3 (основной)	Способность строго доказать утверждение, сформулировать резуль-	***Знать***: теоремы существования и единственности решения краевых задач; свойства гармонических функций; свойства решений краевых задач.

	тат, увидеть следствия полученного результата	***Уметь***: доказывать существование классического решения краевой задачи; использовать принцип максимума для обоснования единственности решения первой краевой задачи для уравнений эллиптического и параболического типов. ***Владеть***: методами построения в явном виде решений краевых задач.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата и язык преподавания

Дисциплина «Уравнения с частными производными» входит в вариативную часть учебного плана основной образовательной программы бакалавриата по данному направлению подготовки и является обязательной для изучения.

Согласно учебному плану дисциплина проводится в *5* и *6* семестрах.

Изучение дисциплины опирается на знания, умения и навыки, приобретенные при освоении образовательной программы предыдущего уровня, а также при изучении дисциплин учебного плана данной образовательной программы: *Алгебра, Математический анализ, Дифференциальные уравнения (обыкновенные дифференциальные уравнения), Функциональный анализ, Комплексный анализ, Физика.*

Знания, полученные при изучении дисциплины, необходимы для успешного освоения таких дисциплины, как *Численные методы*, *Математические модели в экологии*, а также при выполнении научно-исследовательской работы в области математического моделирования физических, биологических, экологических, экономических, социальных и других процессов живой и неживой природы.

Язык преподавания – русский.

3. Виды учебной работы и тематическое содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц или 252 академических часа.

3.1. Виды учебной работы

Виды учебной работы	Объем в академических часах
Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану	**252**
В том числе:	
Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), всего	**124**
В том числе:	
Лекции (Л)	62
Практические занятия (Пр)	62
Лабораторные занятия (Лаб)	0
Вид промежуточной аттестации	Зачет (5 семестр), Экзамен (6 семестр)
Самостоятельная работа обучающихся (СР) (всего)	**128**
В том числе: Самостоятельное изучение разделов дисциплины, подготовка к занятиям. Подготовка к промежуточной аттестации	

3.2. Краткое содержание дисциплины по разделам и видам учебной работы

№ п/п	Раздел дисциплины (тематический модуль)	Трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)					Оценочное средство
		Всего	Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа обучающихся	
Семестр № 5							
1	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка	**16**	4	6		6	Контрольная работа
2	Классификация уравнений в частных производных и их преобразование	**19**	4	8		7	Контрольная работа
3	Основные уравнения математической физики и постановка краевых задач	**17**	5	4		8	
4	Задача на собственные значения и собственные функции	**13**	4	2		7	Контрольная работа
5	Краевые задачи для уравнений гиперболического типа	**43**	13	10		20	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации в семестре - **зачет**							Вопросы к зачету
Всего, 5 семестр		***108***	***30***	***30***		***48***	
Семестр № 6							
6	Краевые задачи для уравнений параболического типа	**46**	12	14		20	Контрольная работа
7	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	**34**	12	8		14	Контрольная работа
8	Специальные функции в задачах математической физики	**16**	4	6		6	
9	Нелинейные уравнения математической физики	**12**	4	4		4	
Вид промежуточной аттестации в семестре – **экзамен**		**36**				36	Вопросы к экзамену
Всего, 6 семестр		***144***	***32***	***32***		***80***	
Итого:		**252**	**62**	**62**		**128**	

3.3. Содержание аудиторных занятий

Содержание лекционных занятий

№ раздела	№ лекции	Основное содержание	Количество часов	В т.ч. с использованием ДОТ (*)
Семестр № 5				
1	1.1	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Линейные однородные уравнения.	2	
1	1.2	Квазилинейные уравнения. Уравнение переноса вещества потоком воздуха	2	
2	2.1	Классификация уравнений с двумя независимыми переменными. Приведение уравнения с двумя независимыми переменными к каноническому виду. Метод характеристик.	2	
2	2.2	Классификация уравнений в случае n ($n > 2$) независимых переменных. Приведение уравнения к каноническому виду. Канонические формы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.	2	
3	3.1	Основные уравнения математической физики и постановка начально-краевых задач. Понятие корректно поставленной задачи.	1	
3	3.2	Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка задач Коши. Классификация граничных условий. Смешанная задача для волнового уравнения. Примеры задач, сводящиеся к решению волнового уравнения.	2	
3	3.3	Вывод уравнения диффузии. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задачи Коши. Виды граничных условий. Постановка смешанных краевых задач.	2	
4	4.1	Первая и вторая формул Грина. Постановка задачи на собственные значения и собственные функции. Свойства собственных значений (вещественность) и собственных функций (ортогональность). Разложение функции в ряд по собственным функциям.	2	
4	4.2	Задача Штурма–Лиувилля. Простейшие задачи Штурма–Лиувилля. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике.	2	
5	5.1	Задача Коши для волнового уравнения на прямой. Формула Даламбера. Свойства решений задачи Коши.	3	
5	5.2	Колебания в неограниченном пространстве. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Метод спуска. Физическая интерпретация формулы Пуассона.	2	
5	5.3	Краевые задачи на полупрямой. Метод продолжений.	2	
5	5.4	Постановка начально-краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области. Существование классического решения. Свободные и вынужденные колебания ограниченной струны. Решение смешанной задачи методом Фурье. Краевые задачи с неоднородными граничными условиями.	4	
5	5.5	Свободные колебания прямоугольной мембраны, круглой мембраны	2	
		Всего, 5 семестр	***30***	

		Семестр № 6		
6	6.1	Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность классического решения задачи Дирихле. Решение смешанной задачи методом Фурье. Функция Грина. Смешанная задача для неоднородного уравнения теплопроводности.	4	
6	6.2	Задача Коши для уравнения теплопроводности. Свойства решений задачи Коши (единственность, устойчивость). Фундаментальное решение (Функция Грина). Интеграл Пуассона. Свойства фундаментального решения и его физический смысл. Неоднородное уравнение теплопроводности на прямой.	4	
6	6.3	Начальная задача для уравнения теплопроводности в пространстве. Многомерное преобразование Фурье.	2	
6	6.4	Уравнение теплопроводности на полупрямой с условиями 1-го рода (условия Дирихле), 2-го рода (условия Неймана), 3-го рода. Метод продолжения. Функции Грина краевых задач на полупрямой.	2	
7	7.1	Оператор Лапласа в криволинейных системах координат. Фундаментальные решения оператора Лапласа в пространстве и на плоскости. Гармонические функции. Формулы Грина. Свойства гармонических функций. Теорема о среднем значении гармонической функции. Принцип максимума.	2	
7	7.2	Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле.	2	
7	7.3	Решение краевых задач для уравнения Лапласа в круге и вне круга. Формула Пуассона. Краевые задачи для уравнения Лапласа в кольце и прямоугольной области.	4	
7	7.4	Метод функций Грина. Функции Грина краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина первой и второй краевой задачи для уравнения Пуассона. Функция Грина задачи Дирихле для шара и круга.	4	
8	8.1	Функции Бесселя. Уравнение Бесселя. Ортогональность функций Бесселя. Задача о колебании нити, подвешенной за один конец. Задача о распространении тепла в круглой пластине	4	
9	9.1	Нелинейные уравнения математической физики. Точные методы решения.	2	
9	9.2	Методы обобщенного и функционального разделения переменных.	2	
		Всего, 6 семестр	***32***	
		Всего:	**62**	

Содержание практических занятий

№ раздела	№ занятия	Основное содержание	Количество часов	В т.ч. с использованием ДОТ (*)
		Семестр № 5		
1	1.1	Решение простейших уравнений в частных производных	2	
2	2.1 2.2	Уравнения в частных производных первого порядка. Общее решение. Решение задачи Коши. *Самостоятельная работа № 1.*	4	

2	2.3 2.4	Приведение уравнения к каноническому виду (случай двух независимых переменных). Построение общего решения. Метод характеристик. Решение задачи Коши	4	
2	2.5	Приведение уравнения к каноническому виду (случай *n* независимых переменных, *n* > 2)	2	
2	2.6	*Контрольная работа № 1*. Канонический вид уравнений в частных производных. Метод характеристик	2	
3	3.1 3.2	Построение математических моделей физических процессов. Постановка краевых задач	4	
4	4.1	Задача Штурма–Лиувилля. Свойства собственных функций. Разложение функций в ряд по собственным функциям.	2	
5	5.1	Решение задачи Коши для волнового уравнения. Метод характеристик. Формула Даламбера.	2	
5	5.2	Краевые задачи для волнового уравнения на полупрямой. Метод продолжения	2	
5	5.3	Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа методом Фурье (однородная и неоднородная задачи)	6	
		Всего, 5 семестр	***30***	
		Семестр № 6		
6	6.1 -3	Решение смешанных краевых задач для уравнений параболического типа. Метод Фурье	6	
6	6.4	Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона	2	
6	6.5 6.6	δ-функция (функция Дирака) и ее свойства. Построение функции источника. Температурное поле, создаваемое точечным источником тепла.	4	
6	6.7	*Контрольная работа № 3*. Решение краевых задач для уравнения параболического типа	2	
7	7.1	Свойства гармонических функций. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона	2	
7	7.2 7.3	Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона методом Фурье	4	
7	7.4	*Контрольная работа № 4*. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона	2	
8	8.1	Специальные функции в задачах математической физики	6	
9	9.1	Нелинейные уравнения математической физики	4	
		Всего, 6 семестр	***30***	
		Итого:	**62**	

3.4. Организация самостоятельной работы обучающегося

Виды самостоятельной работы	**Трудоемкость в час.**
Самостоятельная проработка курса лекций, работа с литературой	10
Выполнение домашних заданий (в том числе заданий, решаемых с помощью систем компьютерной математики)	28
Подготовка к контрольным работам	4
Контрольная работа № 2. Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа	2
Подготовка и сдача зачета	4
Всего, 5 семестр	***48***

Самостоятельная проработка курса лекций, работа с литературой	10
Выполнение домашних заданий (в том числе заданий, решаемых с помощью систем компьютерной математики)	30
Подготовка к контрольным работам	4
Подготовка к экзамену, сдача экзамена	36
Всего, 6 семестр	***80***
Всего за год	**128**

4. Образовательные технологии по дисциплине

При изучении дисциплины «Уравнения с частными производными» используются следующие образовательные технологии:

– аудиторные занятия (лекционные и практические занятия);
– внеаудиторные занятия (самостоятельная работа, индивидуальные консультации).

Предусматривается использование в учебном процессе следующих активных и интерактивных форм проведения занятий:

– практические занятия в диалоговом режиме;
– решение задач с помощью систем компьютерной математики.

Учебно-методические материалы публикуются на сайте дисциплины: http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/UMF/index.html

5. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

5.1. Текущий контроль осуществляется преподавателем дисциплины с помощью *устного опроса* на практических занятиях, при проведении занятий в форме *контрольной работы*, а также проверки выполнения *домашних заданий*. К оценочным средствам для текущего контроля относятся:

– аудиторные контрольные работы,
– домашние контрольные работы,
– задания для решения с помощью систем компьютерной математики.

Примеры вариантов самостоятельных и контрольных работ

Самостоятельная работа № 1
Простейшие уравнения в частных производных

Постройте общее решение уравнений:

1) $u_{xy} - u_x = xy$; 2) $xu_x + \sqrt{1-y^2}\cdot u_y = y$.

Контрольная работа № 1
Канонический вид уравнений в частных производных. Метод характеристик

1. Укажите области на плоскости Oxy, где сохраняется тип уравнения:

$$(\cos^2 x + \sin^2 y)u_{xx} - 4(\cos x + \sin y)u_{xy} + 4u_{yy} - e^y u_x + 5u = 0.$$

2. Решите задачу Коши:

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - (3+\cos^2 x)u_{yy} + u_x + (2-\sin x - \cos x)u_y = 0,$$
$$u(x,\cos x) = 0, \qquad u_y(x,\cos x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos x.$$

Контрольная работа № 2
Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа

В области $0 < x < 1, \quad t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 8u_x - 4u_t + e^x \sin\pi x = 4(1 + x - 2t),$$
$$u(0,t) = t, \qquad u(1,t) = 1,$$
$$u(x,0) = x, \qquad u_t(x,0) = e^x \sin 4\pi x + 1 - x.$$

Контрольная работа № 3
Решение смешанной задачи для уравнения параболического типа

Для смешанной краевой задачи, рассматриваемой в области $0 \le x \le 1, \ t \ge 0$

$$u_t = 4u_{xx} - 4(t-1) + \cos 3\pi x + \frac{x^2}{2},$$
$$u_x(0,t) = 1, \quad u_x(1,t) = t,$$
$$u(x,0) = x - \frac{x^2}{2} + \cos\pi x.$$

1) Постройте и решите соответствующую задачу Штурма–Лиувилля.
2) Постройте решение методом Фурье.

Контрольная работа № 4
Краевые задачи для уравнения Лапласа

1. Найдите гармоническую функцию $u(x, y)$ в круге радиуса $R = 2$, удовлетворяющую на границе области условию Дирихле
$$u(x,y)|_{x^2+y^2=4} = (x^2+y^2)^2.$$
2. При каких значениях параметров A и B краевая задача
$$\Delta u(r,\varphi) = 0, \quad 0 \le r < 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$\frac{\partial u(2,\varphi)}{\partial r} = Ax^2 - By^2 + y, \quad x^2 + y^2 = 4,$$

имеет решение?

3. Найдите решение $u = u(r, \varphi)$ уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, удовлетворяющее на его границе следующим условиям:
$$u(1,\varphi) = 1, \quad u_r(2,\varphi) = \cos 2\varphi.$$

5.2. Промежуточная аттестация проводится в виде зачета и экзамена.

Условием получения зачета (5 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий; выполнение заданий, предлагаемых в рамках самостоятельной работы, выполнение контрольных работ.

Условием допуска к экзамену (6 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий, выполнение всех контрольных работ. Оценка, полученная студентом по результатам работы на практических занятиях, учитывается при выставлении экзаменационной оценки.

Вопросы к зачету (5 семестр)

1. Уравнения в частных производных первого порядка. Построение общего решения линейных однородных уравнений.
2. Уравнения в частных производных первого порядка. Построение общего решения линейных неоднородных и квазилинейных уравнений.
3. Уравнение переноса вещества потоком воздуха.
4. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Канонические формы уравнений с постоянными коэффициентами.
5. Приведение уравнения к каноническому виду. Уравнение характеристик.
6. Канонический вид уравнения гиперболического типа.
7. Канонический вид уравнения параболического типа.
8. Канонический вид уравнения эллиптического типа.
9. Канонический вид уравнений второго порядка с n независимыми переменными.
10. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка краевых условий. Вывод граничных условий, описывающих упругое закрепление концов струны (стержня).
11. Модель динамики концентрации вещества в трубке.
12. Модель распространения тепла в изотропном теле.
13. Свободные колебания неограниченной струны. Формула Даламбера. Некоторые свойства решений волнового уравнения на прямой, определяемые свойствами начальных функций (начальных данных).
14. Вынужденные колебания неограниченной струны.
15. Волновое уравнение на полупрямой. Однородное условие Дирихле (условие Неймана, условие 3 рода) границе $x=0$.
16. Решение задачи о свободных колебаниях ограниченной струны методом Фурье. Условия существования классического решения.
17. Вынужденные колебания ограниченной струны.
18. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных чисел и собственных функций. Свойство ортогональности собственных функций.
19. Вывод уравнения распространения тепла в стержне. Постановка краевых задач.
20. Вывод граничных условий на концах стержня, описывающих режим конвективного теплообмена со средой заданной температуры.
21. Первая и вторая формулы Грина.
22. Третья формула Грина (интегральное представление значения функции в точке, $n=3$).
23. Третья формула Грина (интегральное представление значения функции в точке, $n=2$).
24. Задача Штурма-Лиувилля. Одномерный случай. Периодические граничные условия:

$$X''(x)+cX(x)=0,\ 0<x<L,\ \ X(x)=X(x+L).$$

30. Задача Штурма-Лиувилля. Одномерный случай. Однородные смешанные условия:

$$X''(x)+cX(x)=0,\ 0<x<L,\ \ X'(0)-hX(0)=X(L)=0.$$

31. Задача Штурма-Лиувилля, одномерный случай: $X''(x)+cX(x)=0$, $0<x<L$, $X(0)=X'(L)=0$.
32. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа на плоскости.

Вопросы к экзамену (6 семестр)

1. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Классификация и постановка краевых задач.
2. Модель диффузии вещества в трубке.
3. Задача Коши для волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$ на прямой.
4. Свойства решений задачи Штурма-Лиувилля вида:

$$X''(x)+cX(x)=0,\ 0<x<l,\qquad a_1X'(0)+b_1X(0)=a_2X'(l)+b_2X(l)=0.$$

5. Общая схема метода разделения переменных (метод Фурье).
6. Вывод уравнения распространения тепла в стержне. Постановка краевых задач.
7. Вывод граничных условий на концах стержня, описывающих режим конвективного теплообмена со средой заданной температуры.
8. Распространение тепла в неограниченном стержне. Построение решения с помощью метода разделения переменных (интеграл Фурье).
9. Представление решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой с помощью интеграла Пуассона.
10. Свойства решений задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.
11. Физический смысл фундаментального решения уравнения теплопроводности на прямой (функция Грина).
12. Неоднородное уравнение теплопроводности на прямой.
13. Понятие точечного источника тепла. Функция Дирака. Решение задачи Коши, учитывающей действие точечного источника.
14. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Однородные граничные условия общего вида. Решение краевых задач на полупрямой методом продолжения (общая схема).
15. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Условие Дирихле на границе $x=0$.
16. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Условие Неймана на границе $x=0$.
17. Уравнение теплопроводности на полупрямой с граничным условием 3-го рода на границе $x=0$.
18. Решение однородного уравнения теплопроводности на отрезке $[0,l]$ с граничными условиями Дирихле методом Фурье.
19. Смешанная задача для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с граничными условиями, описывающими теплообмен на концах отрезка со средой нулевой температуры.
20. Решение неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке $[0,l]$ с граничными условиями Дирихле методом Фурье.
21. Преобразование краевых задач с неоднородными граничными условиями.
22. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в круге (внутренняя задача Дирихле).
23. Первая краевая задача для уравнения Лапласа вне круга (внешняя краевая задача Дирихле).
24. Представление решения задачи Дирихле в круге с помощью интеграла Пуассона.
25. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике.
26. Свойства гармонических функций.
27. Единственность и устойчивость решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
28. Условие разрешимости задачи Неймана.
29. Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в круге.
30. Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в кольце.
31. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе.
32. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в кольцевом секторе.
33. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
34. Функция Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона.
35. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона в шаре.
36. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в кольце.

Подробно средства оценивания для проведения промежуточной аттестации обучающихся приведены в Фонде оценочных средств по данной дисциплине.

6. Методические рекомендации обучающимся по дисциплине, в том числе для самостоятельной работы

Для успешного освоения дисциплины необходимо знание тем и основных понятий следующих дисциплин учебного плана:

1) *Алгебра* - приведение квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа, метод Якоби), закон инерции.
2) *Математический анализ* – непрерывные функции; кусочно-непрерывные функции; криволинейные координаты; замена переменных; частные производные; неявные функции; дифференцирование неявных функций, поверхностные интегралы; формула Остроградского-Гаусса; интегралы, зависящие от параметра; несобственные интегралы; функциональные ряды; признаки сходимости ряда; ряды и интегралы Фурье; кратные интегралы; производная по направлению, градиент, дивергенция, оператор Лапласа.
3) *Дифференциальные уравнения (Обыкновенные дифференциальные уравнения)* – методы решения уравнений первого порядка (метод разделения переменных, метод вариации произвольной постоянной), задача Коши для линейных уравнений первого и второго порядка с постоянными коэффициентами, уравнение Эйлера.
4) *Функциональный анализ* - собственные значения и собственные функции, линейные операторы; ортогональные системы функций; полные системы функций; пространство функций $L_2(G)$.
5) *Комплексный анализ (теория функций комплексного переменного)* - гармонические и аналитические функции, вычисление интегралов с помощью вычетов.
6) *Физика* - закон Гука, равнодействующая сил, законы Ньютона; закон сохранения энергии, закон внутренней теплопроводности в твердых телах (закон Фурье), закон конвективного теплообмена на границе двух сред (закон Ньютона), закон диффузии (закон Нернста).

Задания для самопроверки к началу изучения курса

1. Найдите производную функции $y(x)=\int_0^x \sin\frac{x-\xi}{a}d\xi$.
2. Для функции $u=1/r$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, найдите grad u в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
3. Для заданной скалярной функции $\varphi(x,y,z)$ и векторного поля $\vec{a}(x,y,z)$ запишите следующие операции $\operatorname{div}(\varphi\,\vec{a})$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$.
4. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y'(x)+y=f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=y_0$.
5. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y''(x)+y=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$.
6. Найдите частные производные первого и второго порядков от следующих функций $u(x,y)=x\sin(x+y)$, $u(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.
7. Найдите частные производных u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} от функции $u=f(\xi,\eta)$, где $\xi=x^2+y^2$, $\eta=2xy$.

8. Докажите, что функция $u = \ln(1/r)$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
9. Докажите, что функция $u = 1/r$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$
10. Постройте выражение для оператора Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в полярных координатах.
11. Найдите коэффициенты разложения функций $u(x) = x$ и $u(x) = 1$ на отрезке [0, 1] в тригонометрический ряд Фурье.
12. Найдите производную y' для функции $y(x)$, определяемой следующим уравнением $x^2 + 2xy - y^2 = 4.$
13. Найдите производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора r этой точки.

Методические и справочные материалы по дисциплине, план-график практических занятий и контрольных мероприятий, конспекты практических занятий, задания для самостоятельной работы, примерные варианты контрольных работ, результаты текущего контроля и материалы для подготовки к промежуточной аттестации публикуются на сайте дисциплины http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/UMF/index.html (в открытом доступе).

7. Методические рекомендации преподавателям по дисциплине

Планирование лекционных и практических занятий осуществляется с учётом установленного количества часов.

Лекции составляют основу теоретического обучения и дают систематизированные основы научных знаний по дисциплине, раскрывают состояние и перспективы развития соответствующей области науки, концентрируют внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулируют их активную познавательную деятельность и способствуют формированию творческого мышления. Ведущим методом лекционного занятия выступает устное изложение учебного материала.

Практические занятия направлены на формирование у обучающихся умений решать типовые задачи. Преподаватель оценивает знания и умения обучающихся путем проведения контрольных работ и проверки домашних заданий.

7.1. Задачи для аудиторных занятий и задачи, предлагаемые для самостоятельного решения (домашнее задание)

Для проведения практических занятий рекомендуется использовать следующий задачник: *Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений*. / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

№ темы	Тема	Глава задачника	Номера задач	
			для аудиторных занятий	Для самостоятельных занятий
0	Классификация уравнений в частных производных. Реше-	Гл. 2, §§ 1,2	1; 2; 3; 6; 7 (1,3,5,7)	7 (2,4,6,8); 8 (2)

	ние простейших уравнений в частных производных			
1	Уравнения в частных производных первого порядка. Общее решение. Решение задачи Коши	Гл. 2, § 3	11; 13 (1); 14 (1,3,5,6); 15 (3,4); 17 (1,3,7); 18 (2); 19	12; 13 (2); 14 (2,4,7); 15 (1,2); 16; 17 (2,5); 18 (4); 20
2	Приведение уравнения к каноническому виду. Метод характеристик			
	Приведение уравнения к каноническому виду (случай двух независимых переменных). Построение общего решения. Метод характеристик. Решение задачи Коши	Гл. 2, §§ 5, 7	33 (1,2); 34 (1,2); 35 (1,2); 36 (1); 40 (1,3,5)	33 (3); 35 (3,4); 36 (4); 40 (2,4,6)
	Приведение уравнения к каноническому виду (случай n независимых переменных, n>2)	Гл. 2, § 6	37 (1); 38 (1; 4)	37 (3); 38 (2,6)
3	Построение математических моделей физических процессов. Постановка краевых задач	Гл. 3, §§ 1; 2	1; 4; 9; 12; 15; 16	3; 6; 13; 17
4	Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций . Преобразование краевых задач	Гл. 5, §§ 1; 3	3; 5; 7 (1; 2); 9; 11; 23 (б,в.г,д); 25	7 (3-8); 10; 12; 23 (е, ж); 26
5	Краевые задачи для уравнений гиперболического типа			
	Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера	Гл. 5, § 2	13 (2,3); 14; 19 (1); 22	13 (7); 15; 19 (2)
	Краевые задачи для волнового уравнения на полупрямой. Метод продолжения			
	Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа методом Фурье (однородная и неоднородная задачи)	Гл. 5, § 4	31 (2); 32 (1); 38 (5); 41 (5,8); 42	31 (3); 32 (3); 38 (7); 41 (9)
	Распространение волн в пространстве	Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики». М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2004. Задачи к главе V.		
6	Краевые задачи для уравнений параболического типа			
	Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье	Гл. 5, § 4	27; 28 (3); 34; 35; 38 (2); 41 (4); 44	29; 36; 46
	Решение задачи Коши для уравнения параболического типа. Формула Пуассона	Гл. 5, § 6	72 (1); 73; 76	72 (2); 77
	δ-функция (функция Дирака) и ее свойства. Построение	Будак Б.М. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1972. Гл. III, § 3; Гл.		

	функции источника. Температурное поле, создаваемое точечным источником тепла.	V, § 3		
7	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа			
	Свойства гармонических функций. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона	Гл. 4, §§ 1,2	1(в); 4; 5(1); 6(2); 7 (4); 8 (2); 9 (1); 12 (2); 13 (1); 14	4(2); 7(3); 8(1); 9(2); 10(3); 12 (3); 13(3)
	Применение метода Фурье к решению краевых задач.	Гл. 5, § 4	48; 49; 54; 56(1); 59(3); 63; 64; 65	50; 55; 56(7); 60; 61; 66
*	Решение уравнений в частных производных с помощью метода интегральных преобразований Лапласа	Гл. 1, §§ 1,2	1; 2; 3 (нечетные); 4; 5 (1); 6(а); 8 (1-7,10); 9; 11 (1)	3 (четные); 5(2); 6(б); 7; 8(8,9); 10; 11(2)
		Гл. 5, § 5	68 (1; 4)	68 (2;5)
8	Специальные функции в задачах математической физики	Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физике. М.: Наука, 1985. Глава 5, § 2		
9	Нелинейные задачи математической физики	Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005.		

7.2. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

Варианты контрольных работ и рекомендации по оцениванию контрольных заданий приведены в фонде оценочных средств.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

8.1. Основная литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во Моск. ун-та (издание любого года).

8.2. Дополнительная литература:

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М., 1976.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М., 1988.
3. Ерофеенко В.Т., Козловская И.С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: Курс лекций. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
4. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.
5. Олейник О.А. «Лекции об уравнениях с частными производными». М.: Изд-во БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М., 1961.

7. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005.
8. Свешников А.Г. и др. Лекции по математической физике. – М., 1993.

8.3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Сайт **«EqWorld. МИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»:**
   Методы решений уравнений с частными производными:
   http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/meth-pde.htm

   Книги по уравнениям с частными производными:
   http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm
2. Пакет для математических и инженерных расчетов MathCAD
   (сайт производителя https://www.ptc.com/en/products/mathcad)
   Петрозаводский университет обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения.
3. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека онлайн» http://biblioclub.ru/
4. Электронной библиотечной системы «Консультант студента. Студенческая электронная библиотека» http://www.studentlibrary.ru

8.4. Информационное обеспечение дисциплины в системе электронного (дистанционного) обучения

Электронный ресурс, содержащий методические и справочные материалы по дисциплине размещен на образовательном портале ПерГУ https://edu.petrsu.ru/object/2567 (в открытом доступе).

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническая база ПетрГУ обеспечивает проведение всех видов дисциплинарной подготовки обучающихся, предусмотренных учебным планом и соответствует действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Минимально-необходимый перечень для информационно-технического и материально-технического обеспечения дисциплины:

- аудитория для проведения лекционных и практических занятий, оснащенная рабочими местами для обучающихся и преподавателя, доской, мультимедийным оборудованием;
- библиотека с читальным залом и залом для самостоятельной работы обучающегося, оснащенное компьютером с выходом в Интернет, книжный фонд которой составляет специализированная научная, учебная и методическая литература, журналы (в печатном или электронном виде).

Дата: «___» июня 2018 г.