МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Петрозаводский государственный университет»

Институт математики и информационных технологий

Кафедра прикладной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ

Директор института математики

и информационных технологий

______________ Н. Ю. Светова

«____» ___________ 2017 г.

Рабочая программа дисциплины

Уравнения с частными производными

(Уравнения математической физики)

Направление подготовки

01.03.01 – Математика

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр

Форма обучения

очная

Петрозаводск

2017 г.

Общие сведения о дисциплине

Название дисциплины:

Уравнения с частными производными (Уравнения математической физики)

Факультет, на котором преподается данная дисциплина –

институт математики и информационных технологий

Направление подготовки – 01.03.01 - Математика

Квалификация (степень) выпускника – Бакалавр

Часть блока дисциплин – вариативная

Курс – 3

Семестры – 5, 6

Всего зачетных единиц – 7

Всего часов – 252

Аудиторные занятия 140 часа (лекции – 70 часа, практические занятия – 70 часа)

Самостоятельная работа – 112 часов

Экзамен – 6 семестр

Зачет – 5 семестр

Составитель рабочей программы – доцент кафедры прикладной математики и кибернетики, к. ф.-м. н. Семенова Елена Евгеньевна

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины являются:

1) фундаментальная подготовка в области уравнений в частных производных, находящих применение в механике, физике, технике, биологии, экологии.
2) Овладение аналитическими методами решения краевых задач математической физики.

Задачей изучения дисциплины является: овладение основными понятиями, идеями и методами теории уравнений в частных производных.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Входит в вариативную часть блока дисциплин (блок 1 учебного плана).

Базовые дисциплины (с указанием тем и основных понятий, необходимых для успешного изучения дисциплины):

1) *Дифференциальные уравнения (Обыкновенные дифференциальные уравнения)* – методы решения уравнений первого порядка (метод разделения переменных, метод вариации произвольной постоянной), задача Коши для линейных уравнений первого и второго порядка с постоянными коэффициентами, уравнение Эйлера.
2) *Алгебра* - приведение квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа, метод Якоби), закон инерции.
3) *Математический анализ* – непрерывные функции; кусочно-непрерывные функции; криволинейные координаты; замена переменных; частные производные; неявные функции; дифференцирование неявных функций, поверхностные интегралы; формула Остроградского-Гаусса; интегралы, зависящие от параметра; несобственные интегралы; функциональные ряды; признаки сходимости ряда; ряды и интегралы Фурье; кратные интегралы; производная по направлению, градиент, дивергенция, оператор Лапласа.
4) *Функциональный анализ* - собственные значения и собственные функции, линейные операторы; ортогональные системы функций; полные системы функций; пространство функций $L_2(G)$.
5) *Комплексный анализ (теория функций комплексного переменного)* - гармонические и аналитические функции, вычисление интегралов с помощью вычетов.
6) *Физика* - закон Гука, равнодействующая сил, законы Ньютона; закон сохранения энергии, закон внутренней теплопроводности в твердых телах (закон Фурье), закон конвективного теплообмена на границе двух сред (закон Ньютона), закон диффузии (закон Нернста).

Знания, полученные при изучении дисциплины, необходимы для успешного освоения таких дисциплины, как «Численные методы», «Математические модели в экологии», а также при выполнении научно-исследовательской работы в области математического моделирования физических, биологических, экологических, экономических, социальных и других процессов живой и неживой природы.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Общекультурные компетенции:

ОК-7 – способность к самоорганизации и самообразованию.

Общепрофессиональные компетенции:

ОПК – 1 (частично) - Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, дифференциальных уравнений.

Профессиональные компетенции:

ПК-2: Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики;

ПК-3: Способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

Знать: постановки основных краевых задач для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов; метод разделения переменных; формулы Даламбера и Пуассона; принцип максимума для уравнений эллиптического и параболического типов.

Уметь: определять тип уравнения, находить решения краевых задач методом разделения переменных; исследовать корректность основных краевых задач; уметь пользоваться принципом максимума при оценке решений первой краевой задачи для уравнений эллиптического и параболического типов; находить решения задачи Коши для уравнений гиперболического и параболического типов; уметь выводить волновое уравнение, уравнения теплопроводности и диффузии.

Владеть: методами построения в явном виде решений краевых задач, методами определения корректности начально-краевых задач для основных типов линейных уравнений второго порядка, владеть методом вывода уравнений на основе физических законов.

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 зачетных единиц 360 часа (105 часов аудиторных занятий и 255 часов самостоятельной работы).

4.1. Виды и трудоемкость учебной работы

Виды учебной работы	Трудоемкость в 5 семестре	Трудоемкость в 6 семестре	Трудоемкость за год
Лекции, час	34	36	70
Практические занятия, час	34	36	70
Самостоятельная работа, включая подготовку к экзамену, час	40	72	112
Итого в часах	108	144	252
Итого в зачетных единицах	3	4	7
Проверка знаний	Зачет	Экзамен	

4.2. Наименование тем лекций, их содержание, объем лекционных часов.

№	Тема лекции, содержание	Объем часов
5 семестр		
1	Предмет математической физики. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Линейные однородные уравнения. Квазилинейные уравнения. Нелинейные уравнения. Уравнение переноса вещества потоком воздуха	**4**
2	Основные уравнения математической физики и постановка начально-краевых задач. Понятие корректно поставленной задачи. - Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка задач Коши. Классификация граничных условий. Смешанная задача для волнового уравнения. Примеры задач, сводящиеся к решению волнового уравнения. - Вывод уравнения диффузии. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задачи Коши. Виды граничных условий. Смешанная задача. - Математические модели стационарных процессов.	**5**
3	Классификация уравнений в частных производных и их преобразование. − Классификация уравнений с двумя независимыми переменными. − Приведение уравнения с двумя независимыми переменными к каноническому виду. Метод характеристик. − Классификация уравнений в случае n (n > 2) независимых переменных. Приведение уравнения к каноническому виду. − Канонические формы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.	**4**
4	Задача на собственные значения и собственные функции − Первая и вторая формул Грина. − Интегральное представление функции. Третья формула Грина. − Постановка задачи на собственные значения и собственные функции. Свойства собственных значений (вещественность) и собственных функций (ортогональность). − Задача Штурма-Лиувилля. Простейшие задачи Штурма-Лиувилля. − Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике	**4**
5	Уравнения гиперболического типа. − Задача Коши для волнового уравнения на прямой. Формула Даламбера. − Краевые задачи на полупрямой. Метод продолжений. − Колебания в неограниченном пространстве. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Метод спуска. Физическая интерпретация формулы Пуассона. − Постановка начально-краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области. Существование решения. Свободные и вынужденные колебания ограниченной струны. Решение смешанной задачи методом Фурье. Краевые задачи с неоднородными граничными условиями. − Свободные колебания прямоугольной мембраны	**13**
6	Уравнения параболического типа. − Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение смешанной задачи методом Фурье. Функция Грина. Неоднородная смешан-	**4**

	ная задача для уравнения теплопроводности.	
	Всего часов в 5 семестре:	**34**
6 семестр		
7	Уравнения параболического типа (продолжение). – Задача Коши для уравнения теплопроводности. Фундаментальное решение. Интеграл Пуассона. Свойства фундаментального решения и его физический смысл. – Неоднородное уравнение теплопроводности на прямой. – Начальная задача для уравнения теплопроводности в пространстве. Многомерное преобразование Фурье. – Уравнение теплопроводности на полупрямой с условиями 1-го рода (условия Дирихле), 2-го рода (условия Неймана), 3-го рода. – Математическая модель распространения вещества в атмосфере. Задача о накоплении вещества на подстилающей поверхности. – Диффузионный процесс в активной среде с размножением.	**8**
8	Уравнения эллиптического типа. Краевые задачи для уравнения Лапласа. – Свойства гармонических функций. – Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. – Оператор Лапласа в криволинейных системах координат. Фундаментальное решение оператора Лапласа в пространстве и на плоскости. – Решение краевых задач в круге и вне круга. Формула Пуассона. – Краевая задача для уравнения Лапласа в кольце и прямоугольной области. – Функция Грина оператора Лапласа. Решение задачи Дирихле с помощью функции Грина. – Первая краевая задача для уравнения Лапласа в шаре. – Задача Неймана. Необходимое условие разрешимости. – Основы теории потенциала. Поверхностные потенциалы. – Свойства потенциала двойного слоя. Свойства потенциала простого слоя. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач	**16**
9	Специальные функции в задачах математической физики. – Полиномы Лежандра. Уравнения полиномов Лежандра. Свойства полиномов Лежандра. Задача о вращающейся нити. – Функции Бесселя. Уравнение Бесселя. Ортогональность функций Бесселя. Задача о колебании нити, подвешенной за один конец. – Задача динамики сорбции газов	**8**
10	Нелинейные уравнения математической физики. Точные методы решения. Методы обобщенного и функционального разделения переменных.	**4**
	Всего часов в 6 семестре:	**36**
	ВСЕГО лекционных часов за год:	**70**

4.3. Тематика практических занятий, объем часов.

№ темы	Тема		Кол-во часов
1	Классификация уравнений в частных производных. Решение простейших уравнений в частных производных		3
2	Уравнения в частных производных первого порядка. Общее решение. Решение задачи Коши. Самостоятельная работа № 1.		5
3	Приведение уравнения к каноническому виду. Метод характеристик		
		Приведение уравнения к каноническому виду (случай двух независимых переменных). Построение общего решения. Метод характеристик. Решение задачи Коши	4
		Приведение уравнения к каноническому виду (случай n независимых переменных, n>2)	2
		Контрольная работа № 1. Канонический вид уравнений в частных производных. Метод характеристик	Дом.
4	Построение математических моделей физических процессов. Постановка краевых задач		4
5	Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций. Разложение функций в ряд по собственным.		2
6	Краевые задачи для уравнений гиперболического типа		
		Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера.	2
		Краевые задачи для волнового уравнения на полупрямой. Метод продолжения	2
		Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа методом Фурье (однородная и неоднородная задачи)	6
		Распространение волн в пространстве. Формула Пуассона	2
		Контрольная работа № 2. Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа	2
		Всего часов в 5 семестре:	**34**
7	Краевые задачи для уравнений параболического типа		
		Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье	5
		Решение задачи Коши для уравнения параболического типа. Формула Пуассона	3
		δ-функция (функция Дирака) и ее свойства. Построение функции источника. Температурное поле, создаваемое точечным источником тепла.	4
		Контрольная работа № 3. Решение краевых задач для уравнения параболического типа	2
8	Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа		
		Свойства гармонических функций. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона	2

		Применение метода Фурье к решению краевых задач	4
		Контрольная работа № 4. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона	2
9	Решение уравнений в частных производных с помощью метода интегральных преобразований Лапласа		4
10	Специальные функции в задачах математической физики		6
11	Нелинейные уравнения математической физики		4
		Всего часов в 6 семестре	**36**
		ВСЕГО часов практических занятий за год:	**70**

4.4. Самостоятельная работа (в том числе под контролем преподавателя на консультациях)

Виды самостоятельной работы	**Трудоемкость в час.**	**Форма контроля**
Самостоятельная проработка курса лекций	**10**	Опрос на лекции, ответ на практическом занятии
Выполнение домашних заданий	**26**	ответ на практическом занятии, проверка преподавателем во внеаудиторное время, обсуждение заданий во время контактных часов
Подготовка к контрольным работам	**4**	Контрольная работа
Всего 1 семестр	**40**	
Самостоятельная проработка курса лекций	**10**	Опрос на лекции, ответ на практическом занятии
Выполнение домашних заданий	**22**	ответ на практическом занятии, проверка преподавателем во внеаудиторное время, обсуждение заданий во время контактных часов
Подготовка к контрольным работам	**4**	Контрольная работа
Подготовка к экзамену	**36**	Экзамен
Всего 2 семестр	**72**	
Всего за год	**112**	

4.5. Соответствие компетенций, формируемых при изучении дисциплины, и видов занятий

Перечень компетенций	Виды занятий			Формы контроля
	Л	Пр	СРС	
ОК-7			+	ответы на практическом занятии, выполнение домашних и контрольных заданий, ответы на зачете и экзамене

ОПК-1	+	+	+	ответы на практическом занятии, выполнение домашних и контрольных заданий, ответы на зачете и экзамене
ПК-1, 2, 3, 5	+	+	+	Опрос на лекции, ответы на практическом занятии, выполнение домашних и контрольных заданий, ответы на зачете и экзамене

5. Образовательные технологии

Сочетание традиционных образовательных технологий в форме лекций, практических занятий и проведение контрольных мероприятий (контрольных работ, зачета, экзамена).

Учебно-методические материалы опубликованы на сайте дисциплины: http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/UMF/index.html

6. Учебно-методическое обеспечение практических занятий и самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

6.1. Задания для самопроверки к началу изучения курса

1. Найдите производную функции $y(x)=\int_0^x \sin\frac{x-\xi}{a}d\xi$.
2. Для функции $u=1/r$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, найдите grad u в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
3. Для заданной скалярной функции $\varphi(x,y,z)$ и векторного поля $\vec{a}(x,y,z)$ запишите следующие операции $\operatorname{div}(\varphi\,\vec{a})$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$.
4. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y'(x)+y=f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=y_0$.
5. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения $y''(x)+y=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$.
6. Найдите частные производные первого и второго порядков от следующих функций $u(x,y)=x\sin(x+y)$, $u(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.
7. Найдите частные производных u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} от функции $u=f(\xi,\eta)$, где $\xi=x^2+y^2$, $\eta=2xy$.
8. Докажите, что функция $u=\ln(1/r)$, где $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.
9. Докажите, что функция $u=1/r$, где $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.
10. Постройте выражение для оператора Лапласа $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в полярных координатах.
11. Найдите коэффициенты разложения функций $u(x)=x$ и $u(x)=1$ на отрезке [0, 1] в тригонометрический ряд Фурье.

12. Найдите производную y' для функции $y(x)$, определяемой следующим уравнением $x^2+2xy-y^2=4$.
13. Найдите производную поля $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x,y,z)$ в направлении радиуса-вектора r этой точки.

6.2. Задачи для аудиторных занятий и задачи, предлагаемые для самостоятельного решения (домашнее задание)

Задачник

Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений. / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

№ темы	Тема	Кол-во часов	Глава задачника	Номера задач для аудиторных занятий	Номера задач для самостоятельных занятий
1	Классификация уравнений в частных производных. Решение простейших уравнений в частных производных	2	Гл. 2, §§ 1,2	1; 2; 3; 6; 7 (1,3,5,7)	7 (2,4,6,8); 8 (2)
2	Уравнения в частных производных первого порядка. Общее решение. Решение задачи Коши	4	Гл. 2, § 3	11; 13 (1); 14 (1,3,5,6); 15 (3,4); 17 (1,3,7); 18 (2); 19	12; 13 (2); 14 (2,4,7); 15 (1,2); 16; 17 (2,5); 18 (4); 20
3	Приведение уравнения к каноническому виду. Метод характеристик				
	Приведение уравнения к каноническому виду (случай двух независимых переменных). Построение общего решения. Метод характеристик. Решение задачи Коши	4	Гл. 2, §§ 5, 7	33 (1,2); 34 (1,2); 35 (1,2); 36 (1); 40 (1,3,5)	33 (3); 35 (3,4); 36 (4); 40 (2,4,6)
	Приведение уравнения к каноническому виду (случай n независимых переменных, n>2)	2	Гл. 2, § 6	37 (1); 38 (1; 4)	37 (3); 38 (2,6)
	Контрольная работа № 1	Дом			
4	Построение математических моделей физических процессов. Постановка краевых задач	4	Гл. 3, §§ 1; 2	1; 4; 9; 12; 15; 16	3; 6; 13; 17
5	Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций . Преобразование краевых задач	2	Гл. 5, §§ 1; 3	3; 5; 7 (1; 2) ;9; 11; 23 (б,в.г,д); 25	7 (3-8); 10; 12; 23 (е, ж); 26

6	Краевые задачи для уравнений гиперболического типа				
	Решение задачи Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера	2	Гл. 5, § 2	13 (2,3); 14; 19 (1); 22	13 (7); 15; 19 (2)
	Краевые задачи для волнового уравнения на полупрямой. Метод продолжения	2			
	Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа методом Фурье (однородная и неоднородная задачи)	4	Гл. 5, § 4	31 (2); 32 (1); 38 (5); 41 (5,8); 42	31 (3); 32 (3); 38 (7); 41 (9)
	Распространение волн в пространстве	2	Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики». М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2004. Задачи к главе V.		
	Контрольная работа № 2	2			
7	Краевые задачи для уравнений параболического типа				
	Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье	2	Гл. 5, § 4	27; 28 (3); 34; 35; 38 (2); 41 (4); 44	29; 36; 46
	Решение задачи Коши для уравнения параболического типа. Формула Пуассона	1	Гл. 5, § 6	72 (1); 73; 76	72 (2); 77
	δ-функция (функция Дирака) и ее свойства. Построение функции источника. Температурное поле, создаваемое точечным источником тепла.	1	Будак Б.М. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1972. Гл. III, § 3; Гл. V, § 3		
	Контрольная работа № 3	Дом.			
8	Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа				
	Свойства гармонических функций. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона	Сам.	Гл. 4, §§ 1,2	1(в); 4; (1) 5; 6(2); 7 (4); 8 (2); 9 (1); 12 (2); 13 (1); 14	4(2); 7(3); 8(1); 9(2); 10(3); 12 (3); 13 (3)
	Применение метода Фурье к решению краевых задач.	2	Гл. 5, § 4	48; 49; 54; 56(1);59(3); 63; 64; 65	50; 55; 56(7); 60; 61; 66
	Контрольная работа № 4	2			

9	Решение уравнений в частных производных с помощью метода интегральных преобразований Лапласа	2	Гл. 1, §§ 1,2	1; 2; 3 (нечетные); 4; 5 (1); 6(а); 8 (1-7,10); 9; 11 (1)	3 (четные); 5(2); 6(б); 7; 8(8,9); 10; 11(2)
			Гл. 5, § 5	68 (1; 4)	68 (2;5)
10	Специальные функции в задачах математической физики	3	Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физике. М.: Наука, 1985. Глава 5, § 2		
11	Нелинейные задачи математической физики	2	Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005.		

6.3. Примеры вариантов самостоятельных и контрольных работ

Самостоятельная работа № 1
Простейшие уравнения в частных производных

Постройте общее решение уравнений:

1) $u_{xy} - u_x = xy;$ 2) $xu_x + \sqrt{1-y^2}\cdot u_y = y.$

Контрольная работа № 1.
Канонический вид уравнений в частных производных. Метод характеристик

1. Укажите области на плоскости Oxy, где сохраняется тип уравнения:

$$(\cos^2 x + \sin^2 y)u_{xx} - 4(\cos x + \sin y)u_{xy} + 4u_{yy} - e^y u_x + 5u = 0.$$

2. Решите задачу Коши:

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - (3+\cos^2 x)u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0,$$
$$u(x,\cos x) = 0, \quad u_y(x,\cos x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos x.$$

Ответы:

2. $$\xi = y - \cos x + 2x, \quad \eta = y - \cos x - 2x, \quad 4v_{\xi\eta} - v_\xi = 0,$$
$$v(\xi,\eta) = F(\xi)e^{\frac{1}{4}\eta} + G(\eta), \quad u(x,y) = v(y - \cos x + 2x, y - \cos x - 2x).$$

Контрольная работа № 2.
Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа

В области $0 < x < 1, \quad t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 8u_x - 4u_t + e^x \sin \pi x = 4(1 + x - 2t),$$
$$u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 1,$$
$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = e^x \sin 4\pi x + 1 - x.$$

Ответ:

$u(x,t) = (1-x)t + x + e^{x+2t}v(x,t),$ где

$$v(x,t) = \frac{\pi\cos 2\pi t - \sin 2\pi t - \pi e^{-2t}}{4\pi(1+\pi^2)}\cdot\sin\pi x + \frac{1}{8}\sin 8\pi t\sin 4\pi x.$$

6.4. О допуске к зачету и экзамену

Условием получения зачета (5 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий; выполнение заданий, предлагаемых в рамках самостоятельной работы, выполнение контрольных работ.

Условием допуска к экзамену (6 семестр) является обязательное посещение лекционных и практических занятий, выполнение всех контрольных работ. Оценка, полученная студентом по результатам работы на практических занятиях, учитывается при выставлении экзаменационной оценки.

6.5. Вопросы к зачету и экзамену

5 семестр (зачет)

1. Уравнения в частных производных первого порядка. Построение общего решения линейных однородных уравнений.
2. Уравнения в частных производных первого порядка. Построение общего решения линейных неоднородных и квазилинейных уравнений.
3. Уравнение переноса вещества потоком воздуха.
4. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Канонические формы уравнений с постоянными коэффициентами.
5. Приведение уравнения к каноническому виду. Уравнение характеристик.
6. Канонический вид уравнения гиперболического типа.
7. Канонический вид уравнения параболического типа.
8. Канонический вид уравнения эллиптического типа.
9. Канонический вид уравнений второго порядка с n независимыми переменными.
10. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка краевых условий. Вывод граничных условий, описывающих упругое закрепление концов струны (стержня).
11. Модель динамики концентрации вещества в трубке.
12. Модель распространения тепла в изотропном теле.
13. Свободные колебания неограниченной струны. Формула Даламбера. Некоторые свойства решений волнового уравнения на прямой, определяемые свойствами начальных функций (начальных данных).
14. Вынужденные колебания неограниченной струны.
15. Волновое уравнение на полупрямой. Однородное условие Дирихле (условие Неймана, условие 3 рода) границе x=0.
16. Решение задачи о свободных колебаниях ограниченной струны методом Фурье. Условия существования классического решения.
17. Вынужденные колебания ограниченной струны.
18. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных чисел и собственных функций. Свойство ортогональности собственных функций.
19. Вывод уравнения распространения тепла в стержне. Постановка краевых задач.
20. Вывод граничных условий на концах стержня, описывающих режим конвективного теплообмена со средой заданной температуры.
21. Первая и вторая формулы Грина.
22. Третья формула Грина (интегральное представление значения функции в точке, n=3).

23. Третья формула Грина (интегральное представление значения функции в точке, n=2).
24. Задача Штурма-Лиувилля. Одномерный случай. Периодические граничные условия:

$$X''(x)+cX(x)=0,\ 0<x<L,\ \ X(x)=X(x+L).$$

30. Задача Штурма-Лиувилля. Одномерный случай. Однородные смешанные условия:

$$X''(x)+cX(x)=0,\ 0<x<L,\ \ X'(0)-hX(0)=X(L)=0.$$

31. Задача Штурма-Лиувилля, одномерный случай: $X''(x)+cX(x)=0,\ 0<x<L,\ X(0)=X'(L)=0$.
32. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа на плоскости.

6 семестр (экзамен)

1. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Классификация и постановка краевых задач.
2. Модель диффузии вещества в трубке.
3. Задача Коши для волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$ на прямой.
4. Свойства решений задачи Штурма-Лиувилля вида:

$$X''(x)+cX(x)=0,\ 0<x<l,\qquad a_1X'(0)+b_1X(0)=a_2X'(l)+b_2X(l)=0.$$

5. Общая схема метода разделения переменных (метод Фурье).
6. Вывод уравнения распространения тепла в стержне. Постановка краевых задач.
7. Вывод граничных условий на концах стержня, описывающих режим конвективного теплообмена со средой заданной температуры.
8. Распространение тепла в неограниченном стержне. Построение решения с помощью метода разделения переменных (интеграл Фурье).
9. Представление решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой с помощью интеграла Пуассона.
10. Свойства решений задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.
11. Физический смысл фундаментального решения уравнения теплопроводности на прямой (функция Грина).
12. Неоднородное уравнение теплопроводности на прямой.
13. Понятие точечного источника тепла. Функция Дирака. Решение задачи Коши, учитывающей действие точечного источника.
14. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Однородные граничные условия общего вида. Решение краевых задач на полупрямой методом продолжения (общая схема).
15. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Условие Дирихле на границе x=0.
16. Уравнение теплопроводности на полупрямой. Условие Неймана на границе x=0.
17. Уравнение теплопроводности на полупрямой с граничным условием 3-го рода на границе x=0.
18. Решение однородного уравнения теплопроводности на отрезке $[0,l]$ с граничными условиями Дирихле методом Фурье.
19. Смешанная задача для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с граничными условиями, описывающими теплообмен на концах отрезка со средой нулевой температуры.
20. Решение неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке $[0,l]$ с граничными условиями Дирихле методом Фурье.
21. Преобразование краевых задач с неоднородными граничными условиями.
22. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в круге (внутренняя задача Дирихле).
23. Первая краевая задача для уравнения Лапласа вне круга (внешняя краевая задача Дирихле).
24. Представление решения задачи Дирихле в круге с помощью интеграла Пуассона.
25. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике.
26. Свойства гармонических функций.
27. Единственность и устойчивость решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
28. Условие разрешимости задачи Немана.
29. Внутренняя задача Немана для уравнения Лапласа в круге.

30. Внутренняя задача Немана для уравнения Лапласа в кольце.
31. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе.
32. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в кольцевом секторе.
33. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
34. Функция Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона.
35. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона в шаре.
36. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в кольце.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики». М.: Изд-во Моск. Ун-та (издание любого года).
2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005.

Дополнительная литература:

1. Петровский И.Г. «Лекции об уравнениях с частными производными». М.: Физматгиз, 1961.
2. Свешников А.Г. и др. Лекции по математической физике. М., 1993.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977.
4. Арсенин В.Я. Методы математической физики. М., 1974.
5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1988.
7. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.
8. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М., 1991.
9. Арнольд В.И. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Фазис, 1997.
10. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962.
11. Ерофеенко В.Т., Козловская И.С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: Курс лекций. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
12. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.
13. Олейник О.А. «Лекции об уравнениях с частными производными». М.: Изд-во БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
14. Русак В.Н. Математическая физика. М.: КомКнига, 2006.

Основной задачник:
Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений. / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. Петрозаводск, Изд-во ПетрГУ, 2001.

Дополнительные задачники:
1. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1985.
2. Будак Б.М. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1972.
3. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.,1974.
4. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики.-М., 1968.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Сайт «EqWorld. МИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/meth-pde.htm

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm

2. Пакет для математических и инженерных расчетов MathCAD

   Петрозаводский университет обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения.

3. Сайт «Книги по уравнениям математической физики» http://www.ph4s.ru/book_mat_matphys.html

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения лекционных занятий требуется аудитория с большой доской и компьютерным оборудованием для презентаций.

Программа составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО) направления «01.03.01 – Математика» (квалификация Бакалавр) (утвержден 7 августа 2014 г., приказ Минобрнауки России № 943).

Автор: доцент кафедры ПМиК Семенова Е.Е. ____________________

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры прикладной математики и кибернетики «____» _____________ 2017 года, протокол № ___.

И.о. зав. кафедрой ______________________ /Пешкова И.В./

Программа одобрена на заседании учебно-методической комиссии института математики и информационных технологий от «___» ________ 2017 года, протокол № ___.

Председатель учебно-методической комиссии института
математики и информационных технологий
______________________________ /Семенова Е.Е./