

Вопросы к экзамену по курсу
«Уравнения с частными производными»
(6 семестр, 2023/2024 уч. год)

1. Уравнения в частных производных первого порядка. Построение общего решения линейных однородных уравнений.
2. Уравнения в частных производных первого порядка. Построение общего решения линейных неоднородных и квазилинейных уравнений.
3. Уравнение переноса вещества потоком воздуха.
4. Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных, $n = 2$). Приведение уравнения к каноническому виду. Уравнение характеристик.
5. Канонический вид уравнения гиперболического типа ($n = 2$).
6. Канонический вид уравнения параболического типа ($n = 2$).
7. Канонический вид уравнения эллиптического типа ($n = 2$).
8. Канонические формы уравнений с постоянными коэффициентами ($n = 2$).
9. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка краевых условий. Вывод граничных условий, описывающих упругое закрепление концов струны (стержня).
10. Свободные колебания неограниченной струны. Формула Даламбера. Свойства решений волнового уравнения на прямой.
11. Вынужденные колебания неограниченной струны.
12. Волновое уравнение на полупрямой. Метод продолжения. Однородное условие Дирихле (условие Неймана, условие 3 рода) границе $x=0$.
13. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных чисел и собственных функций.
14. Задача Штурма-Лиувилля, одномерный случай:
$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad X(0) = X(l) = 0.$$
15. Решение задачи о свободных колебаниях ограниченной струны с жестко закрепленными концами (первая краевая задача) методом Фурье. Условия существования классического решения.
16. Вынужденные колебания ограниченной струны с жестко закрепленными концами.
17. Единственность классического решения смешанной краевой задачи для волнового уравнения.
18. Вывод уравнения распространения тепла в стержне. Постановка краевых задач.
19. Вывод граничных условий на концах стержня, описывающих режим конвективного теплообмена со средой заданной температуры.
20. Распространение тепла в неограниченном стержне. Построение решения с помощью метода разделения переменных (интеграл Фурье).
21. Представление решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой с помощью интеграла Пуассона.
22. [Свойства решений задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.](#)
23. [Фундаментальное решение уравнения теплопроводности на прямой \(функция Грина\).](#)
24. [Неоднородное уравнение теплопроводности на прямой.](#)
25. ~~Понятие точечного источника тепла. Функция Дирака. Температурное поле на прямой, создаваемое точечным источником тепла.~~
26. [Уравнение теплопроводности на полупрямой. Решение краевых задач на полупрямой методом продолжения.](#)

27. Решение однородного уравнения теплопроводности на отрезке $[0, l]$ с граничными условиями Дирихле методом Фурье.
28. Решение неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке $[0, l]$ с граничными условиями Дирихле методом Фурье.
29. Преобразование краевых задач с неоднородными граничными условиями.
30. Задача на собственные значения и функции с периодическими условиями:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad X(x) = X(x+2\pi).$$

31. [Первая краевая задача для уравнения Лапласа в круге \(внутренняя задача Дирихле\).](#)
32. [Первая краевая задача для уравнения Лапласа вне круга \(внешняя краевая задача Дирихле\).](#)
33. [Первая краевая задача для уравнения Лапласа в кольце.](#)
34. [Представление решения задачи Дирихле в круге с помощью интеграла Пуассона.](#)
35. [Свойства гармонических функций.](#)
36. [Единственность и устойчивость классического решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.](#)
37. Условие разрешимости задачи Неймана. [Примеры построения условий.](#)
38. [Внутренняя задача Немана для уравнения Лапласа в круге.](#)
39. [Внутренняя задача Немана для уравнения Лапласа в кольце.](#)
40. Метод функций Грина решения краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона