Базовые вопросы и задачи к экзамену по дисциплине **«Уравнения с частными производными»**

(2 семестр)

1. Найдите решение уравнения, удовлетворяющее указанному условию:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2e^x - y\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(0, y) = y.$$

2. 1) Определите тип уравнения

$$u_{xx} - 6u_{xy} + \alpha u_{yy} + 2u_x + (3-\alpha)u_y + \frac{\alpha - 5}{4}u = 0 \qquad (1)$$

в зависимости от параметра $\alpha \in R$.

2) Приведите уравнение (1) к каноническому виду при $\alpha = 5$($\alpha = 9$).

3) Найдите общее решение уравнения (1) при $\alpha = 5$ ($\alpha = 9$).

3. Дайте постановку краевой задачи, которая описывает свободные колебания неограниченной струны. Построение решения задачи Коши с помощью формулы Даламбера (вывод формулы).
4. Дайте постановку краевой задачи, которая описывает вынужденные колебания неограниченной струны.
5. Какие физические процессы можно описать с помощью уравнения $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$?
6. Дайте постановку задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой. Свойство единственности классического решения задачи Коши.
7. Какая функция определяет фундаментальное решение уравнения теплопроводности на прямой? Какой физический смысл она имеет?
8. Запись решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой с помощью его фундаментального решения.
9. Докажите, что функция $G(x,\xi,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ является решением уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$.

10. Дайте постановку краевой задачи, которая описывает распространение тепла в стержне длины l, один из концов которого поддерживается при нулевой температуре, а второй – теплоизолирован.

11. В чем заключается метод разделения переменных (метод Фурье)? Приведите пример краевой задачи, которая может быть решена с помощью метода Фурье.

12. Дайте постановку задачи Штурма-Лиувилля. Как разложить функцию $f(x)$ в ряд по собственным?

13. В области $0 \le x \le \pi,\ \ t \ge 0$ рассматривается следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx} + 8t - x^2 + \cos 3x, \\ &u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 2\pi t, \\ &u(x,0) = 2\cos 2x \cdot \cos x. \end{aligned} \tag{2}$$

    1) Постройте соответствующую задачу Штурма-Лиувилля и решите ее.
    2) Решите краевую задачу (2).

14. Дайте определение гармонической функции. В чем заключается для нее принцип наибольшего/наименьшего значения?

15. Фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости (R^2), в пространстве (R^3).

16. Дайте постановку задачи Дирихле для уравнения Лапласа, которое рассматривается в области D, ограниченной поверхностью S. Можно ли утверждать, что она имеет единственное классическое решение? Ответ обоснуйте.

17. Дайте постановку краевой задачи (Дирихле, Неймана, 3-го рода) для уравнения Лапласа в круге, в кольце, прямоугольнике.

18. Условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа, которое рассматривается в области D, ограниченной поверхностью S. При каких значениях параметров A и B краевая задача

$$\Delta u(r,\varphi) = 0, \quad 0 \le r < 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = Ax^2 - By^2 + y, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

имеет классическое решение?