

Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим задачу оптимального управления непрерывной системой. Пусть модель системы задана соотношениями:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, u), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор состояния системы,

$u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ - вектор управления.

На управление может быть наложено ограничение:

$$u \in U^t, \quad (2)$$

где $U^t \subseteq R^r$ - некоторая область возможных значений управления, которая может изменяться во времени.

Соотношения (1) – это система дифференциальных уравнений. Будем считать, что задано состояние системы в начальный момент времени:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

которое можно рассматривать как начальное условие для (1). Кроме того, может быть задано конечное состояние системы в конечный момент времени $t = T$:

$$x_i(T) = x_i^T, \quad i = \overline{1, m}, \quad m \leq n, \quad (4)$$

представляющее дополнительное ограничение на управляемый процесс $(x(t), u(t))$. Ограничения (4) могут быть заданы не обязательно по всем переменным, а лишь по некоторой их части.

Будем считать, что качество процесса оценивается функционалом:

$$J = \int_0^T f_0(t, x, u) dt + F(x(T)) \rightarrow \min \quad (5)$$

Если правый конец траектории зафиксирован с помощью соотношений (4), то второе слагаемое в (5) является величиной постоянной и, следовательно, не влияет на решение оптимизационной задачи.

Требуется определить процесс $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$, удовлетворяющий ограничениям (1)-(4) и минимизирующий функционал (5). Такой процесс будем называть **оптимальным**.

Комплекс условий, которому должен удовлетворять оптимальный процесс, называется **принципом максимума Понтрягина**.

Теорема. Пусть $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ - оптимальный процесс в задаче оптимального управления (1)-(5). Тогда существует вектор-функция

$$\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)),$$

удовлетворяющая вместе с данным процессом следующим условиям:

1⁰. Функция Гамильтона $H(t, x, \psi, u)$:

$$H(t, x, \psi, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot f_i(t, x, u) - f_0(t, x, u) \quad (6)$$

Достигает максимального значения по u при $x = \tilde{x}(t)$, $\psi = \psi(t)$ на значении $u = \tilde{u}(t)$ при всех $t \in [0, T]$:

$$H(t, \tilde{x}(t), \psi, \tilde{u}(t)) = \max_{u \in U^t} H(t, \tilde{x}(t), \psi, u(t)) \quad (7)$$

2⁰. Переменные $\psi = \psi(t)$ (сопряженные переменные) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H(t, \tilde{x}(t), \psi(t), \tilde{u}(t))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (8)$$

3⁰. В конечный момент времени $t = T$ оптимальная траектория удовлетворяет условиям

$$\psi_i(T) = -\frac{\partial F(\tilde{x}(T))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{m+1, n} \quad (9)$$

Алгоритм построения оптимального процесса (применение теоремы):

1. Из условия (7) устанавливаем $u(t)$ (как функцию x и ψ).
2. Для нахождения $x(t)$ и ψ необходимо решить систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = f_i(t, x, \tilde{u}), \quad i = \overline{1, n}, \\ \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H(t, x, \psi, \tilde{u})}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \\ x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \\ x_i(T) = x_i^T, \quad i = \overline{1, m}, \\ \psi_i(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{m+1, n} \end{array} \right. \quad (10)$$

3. Найти $u(t)$

Пример 1. Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = x_0,$$

а искомый оптимальный процесс минимизирует функционал:

$$J = \int_0^T (u^2 + x) dt + x(T) \rightarrow \min$$

Составим функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot (x + u) - u^2 - x.$$

Применяя условие (7) максимума функции H по u , выразим оптимальное управление $\tilde{u}$ через остальные переменные задачи. Для этого приравняем к нулю производную функции H по u , воспользовавшись тем, что в данной задаче отсутствуют ограничения на управление. Очевидно,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi - 2u,$$

откуда получаем

$$\tilde{u} = \frac{\psi}{2}.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче оптимальное управление зависит лишь от значения сопряженной переменной ψ . Для ее нахождения воспользуемся условием 2⁰ теоремы, согласно которому значение ψ удовлетворяет соотношению (8). В результате с учетом полученного выше значения $\tilde{u}$ для переменных x и ψ будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \frac{\psi}{2}, \\ \dot{\psi} = -\psi + 1, \end{cases} \quad (11)$$

к которой надо добавить условия

$$x(0) = x_0, \quad \psi(T) = -1. \quad (12)$$

Последнее условие добавлено в соответствии с условием 3⁰ теоремы. Решив задачу $\dot{\psi} = -\psi + 1$, $\psi(T) = -1$, найдем

$$\psi(t) = -2e^{T-t} + 1.$$

Найденную функцию подставим в первое уравнение системы (11) и добавив начальное условие, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - e^{T-t} + \frac{1}{2}, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (13)$$

Решив задачу (13), найдем $x(t)$ для оптимальной траектории:

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{T-t} - 1}{2} + \left(x_0 + \frac{1 - e^T}{2} \right) e^t.$$

Оптимальное управление $\tilde{u}(t)$, ранее выраженное через сопряженную переменную ψ , определяется следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = \frac{-2e^{T-t} + 1}{2}.$$

Следует отметить, что в данной задаче удалось найти сопряженную переменную ψ , а затем уже и x . Однако, так происходит не всегда.

Пример 2. Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = x_0,$$

$$J = \int_0^T (u^2 + 8x^2) dt + \frac{1}{2} x^2(T) \rightarrow \min$$

Построим функцию Гамильтона и воспользуемся соотношениями принципа максимума. Имеем

$$H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot (-x + u) - u^2 - 8x^2.$$

Из условия максимума функции $H(t, x, \psi, u)$ для оптимального управления получаем:

$$\tilde{u} = \frac{\psi}{2}.$$

Составим систему для нахождения x и ψ :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{\psi}{2}, \\ \dot{\psi} = 16x + \psi, \\ x(0) = x_0, \\ \psi(T) = -x(T). \end{cases}$$



Построить решение системы

Пример 3. Пусть управляемый процесс описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u, \end{cases}$$

в которой задано начальное состояние $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, а на управление наложено ограничение: $-1 \leq u \leq 2$. Требуется

найти оптимальный процесс $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2, \tilde{u}(t))$, минимизирующий функционал:

$$J = \int_0^T u \, dt + x_2(T) \rightarrow \min, \quad T = 2\pi.$$

1) Функция Гамильтона

$$H(t, x, \psi, u) = -\psi_1 x_2 + \psi_2 (x_1 + 2u) - u = -x_2 \psi_1 + x_2 \psi_2 + (2\psi_2 - 1)u.$$

2) Функция Гамильтона достигает максимального значения по u на:

$$\tilde{u} = \begin{cases} -1, & \psi_2 < \frac{1}{2} \\ 2, & \psi_2 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

3) Сопряженные уравнения:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1$$

Терминальные условия для сопряженных переменных:

$$F(x(2\pi)) = x_2(2\pi), \quad \psi_1(2\pi) = -\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \psi_2(2\pi) = -\frac{\partial F}{\partial x_2} = -1.$$

4) Краевая задача:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2\tilde{u}, \\ \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1, \\ x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \\ \psi_1(2\pi) = 0, \quad \psi_2(2\pi) = -1. \end{cases}$$

5) Поиск сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1, \\ \psi_1(2\pi) = 0, \quad \psi_2(2\pi) = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_1(t) = \sin t, \\ \psi_2(t) = -\cos t. \end{cases}$$

6) Оптимальное управление

$$\tilde{u} = \begin{cases} -1, & \cos t > -\frac{1}{2} \\ 2, & \cos t \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \tilde{u} = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < \frac{2\pi}{3}, \\ 2, & \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{4\pi}{3}, \\ -1, & \frac{4\pi}{3} < t \leq 2\pi. \end{cases}$$

7) Оптимальная траектория

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2, \\ x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \\ t \in [0, 2\pi/3) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t) = -\sin t + 2, \\ x_2(t) = \cos t, \\ t \in [0, 2\pi/3) \end{cases}$$

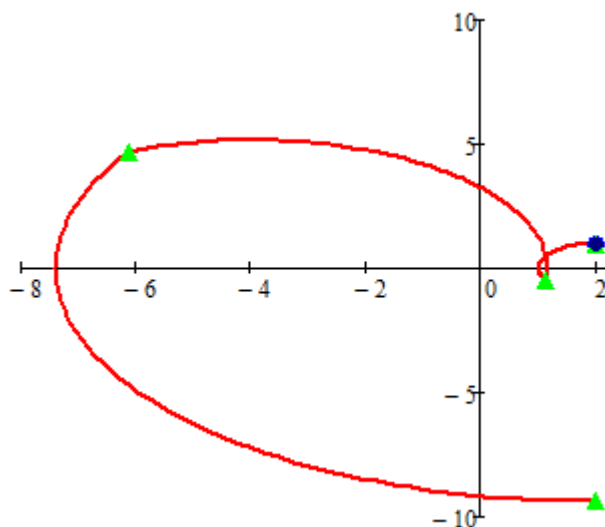
$$x_1(2\pi/3) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2(2\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4, \\ x_1(2\pi/3) = 2 - \sqrt{3}/2, \\ x_2(2\pi/3) = -1/2, \\ t \in [2\pi/3, 4\pi/3] \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t) = -3\cos t + (3\sqrt{3} - 1)\sin t - 4, \\ x_2(t) = (1 - 3\sqrt{3})\cos t - 3\sin t, \\ t \in [2\pi/3, 4\pi/3] \end{cases}$$

$$x_1(4\pi/3) = -7 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2(4\pi/3) = -\frac{1}{2} + 3\sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2, \\ x_1(4\pi/3) = -7 + \sqrt{3}/2, \\ x_2(4\pi/3) = -1/2 + 3\sqrt{3}, \\ t \in [4\pi/3, 2\pi] \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t) = (-1 + 6\sqrt{3})\sin t + 2, \\ x_2(t) = (1 - 6\sqrt{3})\cos t, \\ t \in [4\pi/3, 2\pi] \end{cases}$$

$$x_1(2\pi) = 2, \quad x_2(2\pi) = 1 - 6\sqrt{3}.$$



Домашнее задание

1. $\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad J = \int_0^1 (u^2 + x^2) dt + x^2(1) \rightarrow \min$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \leq 2,$

$$J = \int_0^3 (x_1 + x_2 + 2u) dt - x_2(3) \rightarrow \min$$

3. $\ddot{x} = u, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = \dot{x}(1) = 1,$
--

$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min_u$
--