

Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим задачу оптимального управления непрерывной системой. Пусть модель системы задана соотношениями:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, u), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор состояния системы,

$u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ - вектор управления.

На управление может быть наложено ограничение:

$$u \in U^t, \quad (2)$$

где $U^t \subseteq R^r$ - некоторая область возможных значений управления, которая может изменяться во времени.

Соотношения (1) – это система дифференциальных уравнений. Будем считать, что задано состояние системы в начальный момент времени:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

которое можно рассматривать как начальное условие для (1). Кроме того, может быть задано конечное состояние системы в конечный момент времени $t = T$:

$$x_i(T) = x_i^T, \quad i = \overline{1, m}, \quad m \leq n, \quad (4)$$

представляющее дополнительное ограничение на управляемый процесс $(x(t), u(t))$. Ограничения (4) могут быть заданы не обязательно по всем переменным, а лишь по некоторой их части.

Будем считать, что качество процесса оценивается функционалом:

$$J = \int_0^T f_0(t, x, u) dt + F(x(T)) \rightarrow \min \quad (5)$$

Если правый конец траектории зафиксирован с помощью соотношений (4), то второе слагаемое в (5) является величиной постоянной и, следовательно, не влияет на решение оптимизационной задачи.

Требуется определить процесс $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$, удовлетворяющий ограничениям (1)-(4) и минимизирующий функционал (5). Такой процесс будем называть **оптимальным**.

Комплекс условий, которому должен удовлетворять оптимальный процесс, называется **принципом максимума Понтрягина**.

Теорема. Пусть $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ - оптимальный процесс в задаче оптимального управления (1)-(5). Тогда существует вектор-функция

$$\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)),$$

удовлетворяющая вместе с данным процессом следующим условиям:

1⁰. Функция Гамильтона $H(t, x, \psi, u)$:

$$H(t, x, \psi, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot f_i(t, x, u) - f_0(t, x, u) \quad (6)$$

Достигает максимального значения по u при $x = \tilde{x}(t)$, $\psi = \psi(t)$ на значении $u = \tilde{u}(t)$ при всех $t \in [0, T]$:

$$H(t, \tilde{x}(t), \psi, \tilde{u}(t)) = \max_{u \in U^t} H(t, \tilde{x}(t), \psi, u(t)) \quad (7)$$

2⁰. Переменные $\psi = \psi(t)$ (сопряженные переменные) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = - \frac{\partial H(t, \tilde{x}(t), \psi(t), \tilde{u}(t))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (8)$$

3⁰. В конечный момент времени $t = T$ оптимальная траектория удовлетворяет условиям

$$\psi_i(T) = - \frac{\partial F(\tilde{x}(T))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{m+1, n} \quad (9)$$

Алгоритм построения оптимального процесса (применение теоремы):

1. Из условия (7) устанавливаем $u(t)$ (как функцию x и ψ).

2. Для нахождения $x(t)$ и ψ необходимо решить краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(t, x, \tilde{u}), & i = \overline{1, n}, \\ \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H(t, x, \psi, \tilde{u})}{\partial x_i}, & i = \overline{1, n}, \\ x_i(0) = x_i^0, & i = \overline{1, n}, \\ x_i(T) = x_i^T, & i = \overline{1, m}, \\ \psi_i(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x_i}, & i = \overline{m+1, n} \end{cases} \quad (10)$$

3. Найти $u(t)$

Пример. Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = x_0,$$

а искомый оптимальный процесс минимизирует функционал:

$$J = \int_0^T (u^2 + x) dt + x(T) \rightarrow \min$$

Составим функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot (x + u) - u^2 - x.$$

Применяя условие (7) максимума функции H по u , выразим оптимальное управление $\tilde{u}$ через остальные переменные задачи. Для этого приравняем к нулю производную функции H по u , воспользовавшись тем, что в данной задаче отсутствуют ограничения на управление. Очевидно,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi - 2u,$$

откуда получаем

$$\tilde{u} = \frac{\psi}{2}.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче оптимальное управление зависит лишь от значения сопряженной переменной ψ . Для ее нахождения воспользуемся условием 2⁰ теоремы, согласно которому значение ψ удовлетворяет соотношению (8). В результате с учетом полученного выше значения $\tilde{u}$ для переменных x и ψ будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \frac{\psi}{2}, \\ \dot{\psi} = -\psi + 1, \end{cases} \quad (11)$$

к которой надо добавить условия

$$x(0) = x_0, \quad \psi(T) = -1. \quad (12)$$

Последнее условие добавлено в соответствии с условием 3⁰ теоремы. Решив задачу $\dot{\psi} = -\psi + 1$, $\psi(T) = -1$, найдем

$$\psi(t) = -2e^{T-t} + 1.$$

Найденную функцию подставим в первое уравнение системы (11) и добавив начальное условие, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - e^{T-t} + \frac{1}{2}, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (13)$$

Решив задачу (13), найдем $x(t)$ для оптимальной траектории:

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{T-t} - 1}{2} + \left(x_0 + \frac{1 - e^T}{2} \right) e^t.$$

Оптимальное управление $\tilde{u}(t)$, ранее выраженное через сопряженную переменную ψ , определяется следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = \frac{-2e^{T-t} + 1}{2}.$$