Исследование на полную наблюдаемость нестационарной системы вида:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t), \\ y(t) = R(t)X(t) + g(t) \end{cases} \tag{1}$$

1. Построить матрицу H(t):

$$H(t) = R(t)\Phi(t) \tag{2}$$

где $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица дифференциального уравнения $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, удовлетворяющая условию нормировки $\Phi(0) = E$.

Для того чтобы система (1) была **полностью наблюдаема** на отрезке [0, T] , необходимо и достаточно, чтобы столбцы матрицы H(t) были линейно независимы на отрезке [0, T].

2. Выяснить, будут ли столбцы матрицы линейно независимы на отрезке [0, T], применив, например, следующий критерий:

Критерий Грама. Для того чтобы система вектор-функций $h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)$ (столбцы) была линейно независима на отрезке $[\alpha, \beta]$ необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама

$$\begin{vmatrix} \int_\alpha^\beta h_1^T(t)h_1(t)\,dt & \ldots\ldots\ldots & \int_\alpha^\beta h_1^T(t)h_n(t)\,dt \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \int_\alpha^\beta h_n^T(t)h_1(t)\,dt & \ldots\ldots\ldots & \int_\alpha^\beta h_n^T(t)h_n(t)\,dt \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля.

Построить матрицу Грама для столбцов матрицы H(t)

$$D = \begin{pmatrix} \int_0^T h_1^T(t) h_1(t)\, dt & \dots\dots\dots & \int_0^T h_1^T(t) h_n(t)\, dt \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \int_0^T h_n^T(t) h_1(t)\, dt & \dots\dots\dots & \int_0^T h_n^T(t) h_n(t)\, dt \end{pmatrix}$$

и вычислить ее определитель.

3. Если система полностью наблюдаема на отрезке [0, T], то восстановить ее начальное состояние X_0 можно, решив уравнение:

$$DX_0 = d,$$

   где

$$d = \int_0^T H^T(t) h(t)\, dt,$$

$$h(t) = y(t) - g(t) - H(t) \int_0^T \Phi^{-1}(\tau) F(\tau) d\tau.$$

4. Найдя $X_0 = D^{-1} d,$ определим состояние $X(t)$ системы на отрезке [0, T] по формуле:

$$X(t) = \Phi(t) \left(X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) F(\tau) d\tau \right), \quad t \in [0, t].$$