Устойчивость положений равновесия автономных систем (метод линеаризации Ляпунова, теорема Ляпунова)

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, y), \\ y'(t) = g(x, y), \end{cases} \qquad f, g \in C^2.$$

Поиск положений равновесия $P(x^*, y^*)$**:**

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Исследование на устойчивость по первому приближению[1]:

Положение равновесия $P(x^*, y^*)$ асимптотически устойчиво, если все собственные значения матрицы линеаризованной системы имеют отрицательную вещественную часть. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $P(x^*, y^*)$ неустойчиво.

Матрица линеаризованной системы

$$A = \begin{pmatrix} f'_x(x^*, y^*) & f'_y(x^*, y^*) \\ g'_x(x^*, y^*) & g'_y(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0. \qquad (*)$$

Условия асимптотической устойчивости положения равновесия

$$\operatorname{Re} \lambda_1 < 0,\ \operatorname{Re} \lambda_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{trA} < 0, \\ \mathrm{detA} > 0. \end{cases}$$

[1] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

Тип положения равновесия $P(x^*, y^*)$

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i \neq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$
узел	**седло**	**фокус**	**Центр или фокус** (нужны дополнитель-ные исследования)
$D \geq 0$ и $\det A > 0$	$\det A < 0$	$D < 0$ и $\mathrm{tr} A \neq 0$	$\det A > 0$ и $\mathrm{tr} A = 0$

Дискриминант характеристического уравнения (*):

$$D = (\mathrm{tr} A)^2 - 4 \cdot \det A.$$

Простейшие задачи управления динамикой сообщества «хищник-жертва»

Пусть динамика численности хищника $Y(t)$ и жертвы $X(t)$ без управляющих воздействий описывается системой[2]:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 Y)X, \\ \dfrac{dY}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 X)Y, \end{cases} \tag{1}$$

где ε_1, ε_2, γ_1, γ_2 – положительные постоянные. Фазовый портрет системы (1) изображен на рис. 1.

[2] Классическая модель «хищник-жертва» (модель Лотки-Вольтерры). http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/MathECO/Lections/Lotka_Volterra.pdf

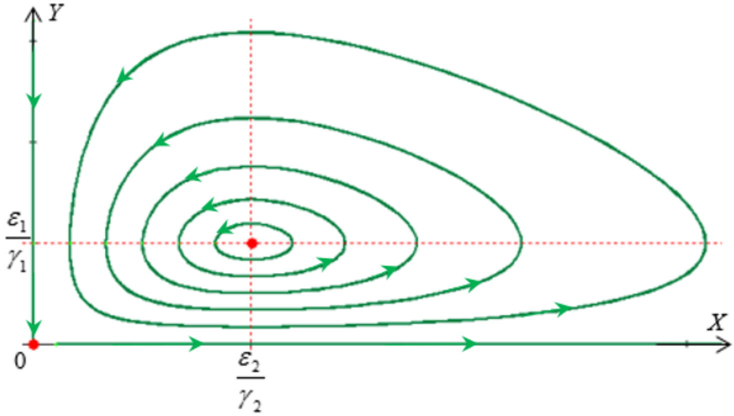

Рис. 1. Фазовый портрет системы (1)

При любых ненулевых начальных численностях хищника и жертвы наблюдаются периодические колебания численности обоих видов (фазовые траектории – замкнутые кривые с центром в точке $\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$, которая является положением равновесия системы (1)). При этом средние значения численностей жертв и хищников на промежутке времени, равному периоду колебаний T, не зависят от начальных данных и равны соответственно (закон сохранения средних):

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \quad \overline{Y} = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t)dt = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}.$$

Под **управлением** ($u(t)$, $v(t)$) будем понимать **изъятие из популяции жертвы** и **популяции хищника** некоторого количества особей (или биомассы). При этом динамика популяции будет описывается уравнением

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 Y)X - u(t), \\ \frac{dY}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 X)Y - v(t). \end{cases} \quad (2)$$

Необходимо, однако, сделать **следующие уточнения**:

1. При $Y = 0$ первое уравнение системы (2) переходит в естественное уравнение эволюции численности жертв в отсутствие хищников:

$$\frac{dX}{dt} = \varepsilon_1 X - u(t).$$

(если $u(t)=\mathrm{const} > 0$, см. практическое занятие № 1, рис. 2, $\varepsilon > 0$). Но при $X = 0$ первое уравнение системы (2) привело бы к выводу, что при $u(t) > 0$ число жертв после перехода через нуль должно становиться отрицательным. Естественно считать, что как только фазовая точка достигает оси Y, первое уравнение (2) перестает действовать, число жертв остается постоянно равным нулю, а эволюция хищников продолжает следовать второму уравнению системы (2) (т. е. при $v(t) > 0$ численность хищников будет стремиться к нулю за конечный промежуток времени, см., например, практическое занятие № 1, рис. 2, $\varepsilon < 0$).

2. При $X = 0$ второе уравнение системы (2) переходит в естественное уравнение эволюции численности хищников в отсутствие жертв:
$$\frac{dY}{dt} = -\varepsilon_2 Y - v(t).$$
Но при $Y = 0$ второе уравнение системы (2) привело бы к выводу, что при $v(t) > 0$ число хищников после перехода через нуль должно становиться отрицательным. Естественно считать, что как только фазовая точка достигает оси X, второе уравнение (2) перестает действовать, число хищников остается постоянно равным нулю, а эволюция жертв продолжает следовать первому уравнению системы (2).

Задача 1. В случае, когда $u(t) = u_0 = \mathrm{const} > 0$ и $v(t) = v_0 = \mathrm{const} > 0$, выяснить, как будут изменяться численности жертвы и хищника.

1. Поиск положений равновесия

$$\begin{cases}(\varepsilon_1 - \gamma_1 Y)X - u_0 = 0,\\ (-\varepsilon_2 + \gamma_2 X)Y - v_0 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{u_0}{\varepsilon_1 - \gamma_1 Y},\\ Y = \dfrac{v_0}{-\varepsilon_2 + \gamma_2 X}.\end{cases} \qquad (3)$$

Первое уравнение системы определяет *вертикальную изоклину* на фазовой плоскости, второе – *горизонтальную*. Геометрически положения равновесия системы (2) есть точки пересечения главных изоклин. Графическое решение системы (3) представлено на рис. 2.

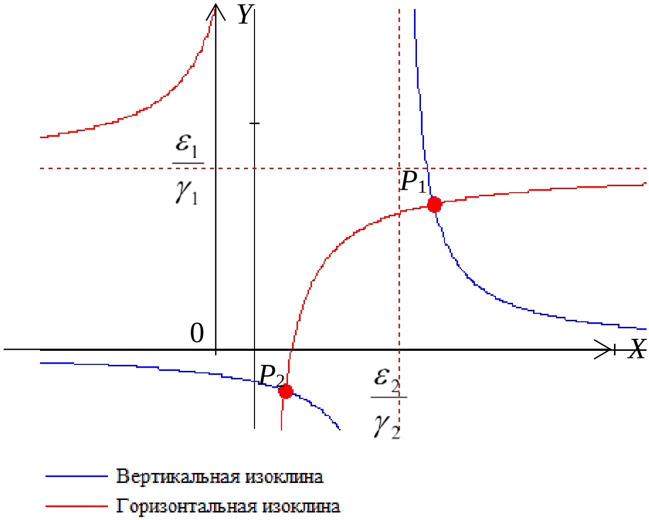

Рис. 2. Графическое решение системы (2)

В первой четверти фазовой плоскости система (2) имеет одно положение равновесия $P_1 = (x^*, y^*)$, координаты которого удовлетворяют условиям:

$$x^* > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \quad 0 < y^* < \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}. \tag{4}$$

Замечание. Второе положение равновесия P_2 лежит в четвертой четверти координатной плоскости и поэтому не имеет смысла (так как численность популяции – неотрицательная величина).

2. Анализ устойчивости положения равновесия P_1

Построим матрицу линеаризованной системы для (2) в окрестности точки P_1:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \gamma_1 y^* & -\gamma_1 x^* \\ \gamma_2 y^* & -\varepsilon_2 + \gamma_2 x^* \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\varepsilon_1 - \gamma_1 y^* - \varepsilon_2 + \gamma_2 x^*)\lambda +$$
$$+ (\varepsilon_1 - \gamma_1 y^*)(-\varepsilon_2 + \gamma_2 x^*) + \gamma_1 \gamma_2 x^* y^* = 0.$$

Так как, учитывая условия (4), имеем

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 y^* - \varepsilon_2 + \gamma_2 x^* > 0,$$

то нарушено необходимое условие устойчивости многочлена[3] $P(\lambda)$. Поэтому не все корни уравнения имеют отрицательную вещественную часть. И, следовательно, по теореме Ляпунова[4] положение равновесия является **неустойчивым**.

Так как свободный член многочлена $P(\lambda)$

$$(\varepsilon_1 - \gamma_1 y^*)(-\varepsilon_2 + \gamma_2 x^*) + \gamma_1 \gamma_2 x^* y^* > 0,$$

то можно утверждать, что положение равновесия P_1 не является седлом (многочлен не имеет вещественных корней разного знака).
В зависимости от знака дискриминанта D многочлена $P(\lambda)$, положение равновесия P_1 является **узлом** ($D \geq 0$) или **фокусом** ($D < 0$).

Типичный фазовый портрет системы (2) с учетом уточнений к системе изображен на рис. 3.

Вывод 1. При любом начальном состоянии через конечный промежуток времени будет наблюдаться вырождение популяции хищников.
Вывод 2. Существует область начальных состояний, при которых через конечный промежуток времени наблюдается вырождение обеих популяций.
Вывод 3. Существует область начальных состояний (на рис. 3 выделена желтым цветом), при которых через конечный промежуток времени наблюдается вырождение только популяции хищников. Численность популяции жертв или стабилизируется на уровне $X = \dfrac{u_0}{\varepsilon_1}$ (траектория красного цвета на рис. 3), или неограниченно растет.

[3] Многочлен с вещественными коэффициентами называется **устойчивым**, если все его нули имеют отрицательную вещественную часть. **Необходимым условием устойчивости многочлена** является положительность (или отрицательность) всех его коэффициентов. См., например, *Постников М.М. Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981.*
[4] См., например, *Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 480 с.*

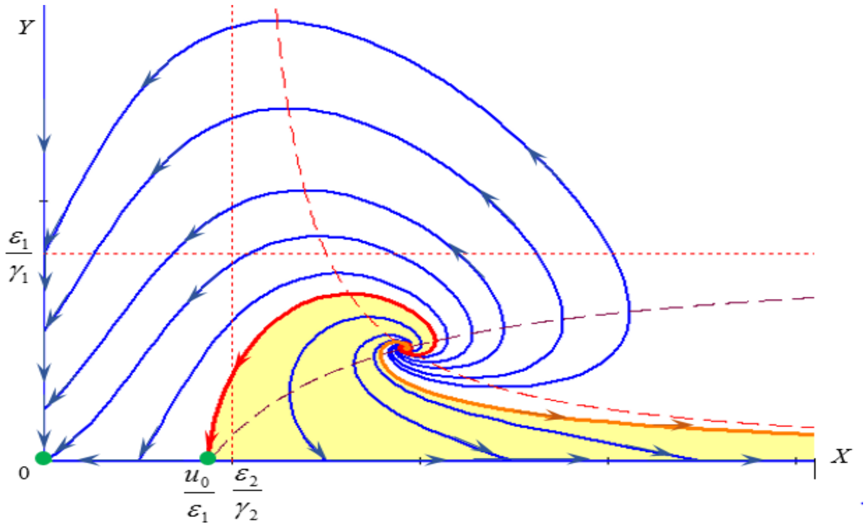

Рис. 3. Фазовый портрет системы (2)

Задача 2. В случае, когда $u(t) = \alpha_1 X(t)$ и $v(t) = \alpha_2 Y(t)$, где α_1, α_2 – положительные постоянные, выяснить, как будут изменяться численности жертв и хищников.

Система (2) в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = (\varepsilon_1 - \alpha_1 - \gamma_1 Y)X, \\ \dfrac{dY}{dt} = (-\varepsilon_2 - \alpha_2 + \gamma_2 X)Y. \end{cases} \tag{5}$$

1. В случае, когда $\varepsilon_1 < \alpha_1$, система (5) имеет одно положение равновесия $(0, 0)$. Матрица линеаризованной системы в окрестности нулевого положения равновесия имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 - \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Так как собственные значения матрицы A вещественны и отрицательны

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 - \alpha_1 < 0, \quad \lambda_2 = -\varepsilon_2 - \alpha_2 < 0,$$

то положение равновесия является **устойчивым узлом**.

Типичный фазовый портрет для случая, когда $\varepsilon_1 < \alpha_1$, представлен на рис. 4.

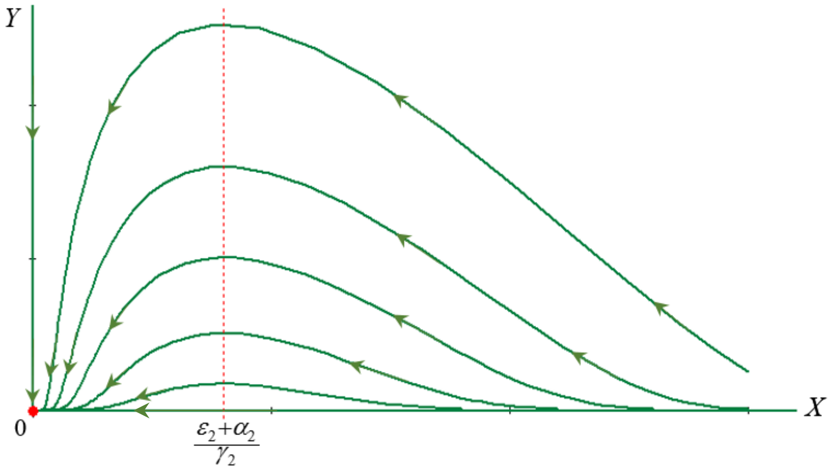

Рис. 4. Фазовый портрет системы (5) для случая $\varepsilon_1 < \alpha_1$

Вывод. Если $\varepsilon_1 < \alpha_1$ (это означает, что истребление жертв идет интенсивнее их размножения), обе популяции обречены на вымирание.

2. Типичный фазовый портрет для случая, когда $\varepsilon_1 = \alpha_1$, представлен на рис. 5. Любая точка оси X является положением равновесия. Положения равновесия **правее** точки $\frac{\varepsilon_2+\alpha_2}{\gamma_2}$ являются **неустойчивыми**.

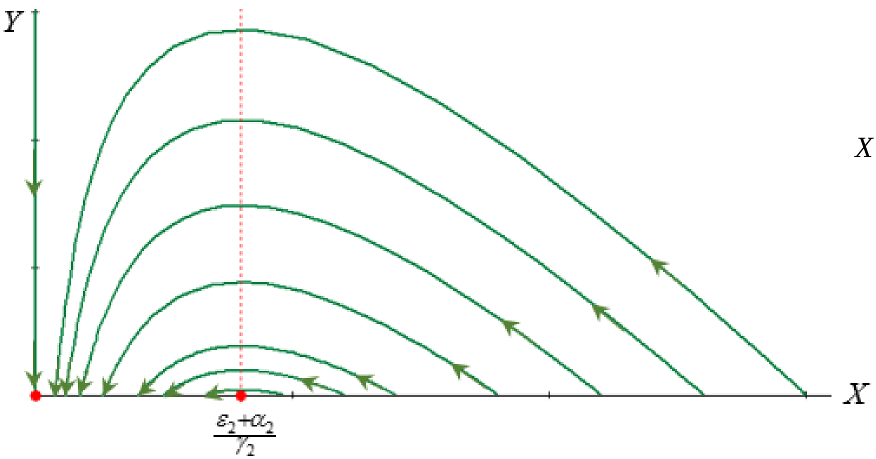

Рис. 5. Фазовый портрет системы (5) для случая $\varepsilon_1 = \alpha_1$

Вывод. Если $\varepsilon_1 = \alpha_1$ (интенсивности истребления и размножения жертв равны), популяция хищников вымирает. Численность популяции жертвы стабилизируется на равновесном уровне, зависящем от начальной численности жертвы.

3. В случае, когда $\varepsilon_1 > \alpha_1$ (размножение жертв в отсутствие хищников интенсивнее истребления жертв), качественное поведение решений системы (5) не отличается от качественного поведения решений системы (1), когда нет изъятия (рис. 1). Изменяются только равновесные (стационарные) значения численностей жертв и хищников, которые равны $\frac{\varepsilon_2+\alpha_2}{\gamma_2}$ и $\frac{\varepsilon_1-\alpha_1}{\gamma_1}$ соответственно. При этом справедливо следующее утверждение.

Закон смещения средних. *Если два вида истребляются равномерно и пропорционально числу особей, то среднее число жертв возрастает, а среднее число хищников убывает*:

$$\overline{X} = \frac{\varepsilon_2 + \alpha_2}{\gamma_2}, \quad \overline{Y} = \frac{\varepsilon_1 - \alpha_1}{\gamma_1}.$$

Нетривиальным фактом здесь является то, что, *производя отстрел зайцев (жертвы) и не охотясь на волков (хищники), мы не влияем на среднюю численность зайцев. А средняя численность волков при этом уменьшается.*

	Выполнить численные эксперименты с моделью (2) (задача 1, задача 2).