18 апреля 2025 г.

Принцип максимума Понтрягина, построение оптимального процесса

Задача 1. Пусть управляемый процесс описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u, \end{cases}$$

в которой задано начальное состояние $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, а на управление наложено ограничение: $-1 \le u \le 2$. Требуется найти оптимальный процесс $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{u}(t))$, минимизирующий функционал:

$$J = \int_0^T u\ dt + x_2(T) \to \min, \quad T = 2\pi.$$

1) Функция Гамильтона

$$H(t, x, \psi, u) = -\psi_1 x_2 + \psi_2(x_1 + 2u) - u = -x_2\psi_1 + x_2\psi_2 + (2\psi_2 - 1)u.$$

2) Функция Гамильтона достигает максимального значения по u на:

$$\tilde{u} = \begin{cases} -1, & \psi_2 < \dfrac{1}{2} \\ 2, & \psi_2 \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

3) Сопряженные уравнения:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1$$

Терминальные условия для сопряженных переменных:

$$F(x(2\pi)) = x_2(2\pi), \quad \psi_1(2\pi) = -\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \psi_2(2\pi) = -\frac{\partial F}{\partial x_2} = -1.$$

4) Краевая задача:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2\tilde{u}, \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1, \\ x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \\ \psi_1(2\pi) = 0, \quad \psi_2(2\pi) = -1. \end{cases}$$

5) Поиск сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1, \\ \psi_1(2\pi) = 0, \quad \psi_2(2\pi) = -1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_1(t) = \sin t, \\ \psi_2(t) = -\cos t. \end{cases}$$

6) Оптимальное управление

$$\tilde{u} = \begin{cases} -1, & \cos t > -\dfrac{1}{2} \\ 2, & \cos t \le -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u} = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \dfrac{2\pi}{3}, \\ 2, & \dfrac{2\pi}{3} \le t \le \dfrac{4\pi}{3}, \\ -1, & \dfrac{4\pi}{3} < t \le 2\pi. \end{cases}$$

7) Оптимальная траектория

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2, \\ x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \\ t \in [0, 2\pi/3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t) = -\sin t + 2, \\ x_2(t) = \cos t, \\ t \in [0, 2\pi/3) \end{cases}$$

$$x_1(2\pi/3) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2(2\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

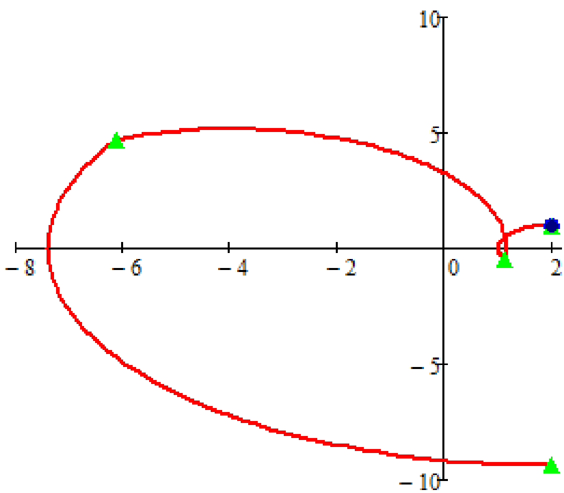
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4, \\ x_1(2\pi/3) = 2 - \sqrt{3}/2, \\ x_2(2\pi/3) = -1/2, \\ t \in [2\pi/3, 4\pi/3] \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t) = -3\cos t + (3\sqrt{3} - 1)\sin t - 4, \\ x_2(t) = (1 - 3\sqrt{3})\cos t - 3\sin t, \\ t \in [2\pi/3; 4\pi/3] \end{cases}$$

$$x_1(4\pi/3) = -7 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2(4\pi/3) = -\frac{1}{2} + 3\sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2, \\ x_1(4\pi/3) = -7 + \sqrt{3}/2, \\ x_2(4\pi/3) = -1/2 + 3\sqrt{3}, \\ t \in [4\pi/3, 2\pi] \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t) = (-1 + 6\sqrt{3})\sin t + 2, \\ x_2(t) = (1 - 6\sqrt{3})\cos t, \\ t \in [4\pi/3; 2\pi] \end{cases}$$

$$x_1(2\pi) = 2, \quad x_2(2\pi) = 1 - 6\sqrt{3}.$$

Оптимальная траектория на фазовой плоскости (x_1, x_2)



Домашнее задание

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \le 2,$$

$$J = \int_0^3 (x_1 + x_2 + 2u)\, dt - x_2(3) \to \min$$