Устойчивость положений равновесия автономных систем (метод линеаризации Ляпунова, теорема Ляпунова)

1. Для автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (2x-y)(x-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = xy-2; \end{cases} \qquad (1)$$

Найти все положения равновесия и исследуйте их на устойчивость.

1. Положения равновесия – являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} (2x-y)(x-2)=0, \\ xy-2=0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x-y=0, \\ x-2=0, \end{array}\right. \\ xy=2. \end{cases}$$

   Решив систему, найдем три положения равновесия:

   $P_1(1;\,2)$, $P_2(-1;\,-2)$, $P_3(2;\,1)$.

2. Определение типа точек. В окрестности положения равновесия $P(x^*,y^*)$ матрица линеаризованной системы имеет вид:

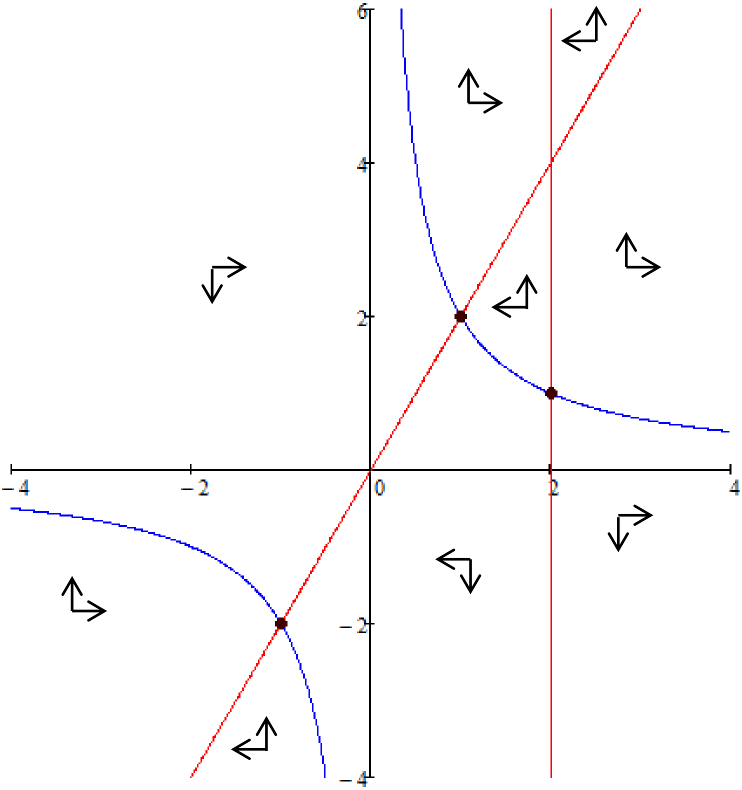
$$A=\begin{pmatrix} 4x^*-y^*-4 & 2-x^* \\ y^* & x^* \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы A:

$$\lambda^2+\lambda(4-5x^*+y^*)-4x^*-2y^*=0.$$

P_i	Характеристическое уравнение	Корни характеристического уравнения	Тип точки
(1; 2)	$\lambda^2+\lambda-4=0$	$\lambda_1=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}>0,$ $\lambda_1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}<0$	Седло (неустойчивое положение равновесия

$(-1; -2)$	$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0$	$\lambda_1 = -4, \; \lambda_2 = -3$	устойчивый узел
$(2; 1)$	$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$	$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3$	неустойчивый узел



Вертикальные изоклины	$y = 2x, \quad x = 2$
Горизонтальная изоклина	$xy = 2$

	возрастает	убывает
$x(t)$	$\rightarrow$	$\leftarrow$
$y(t)$	$\uparrow$	$\downarrow$

Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости на области с разным характером изменения значений фазовых переменных

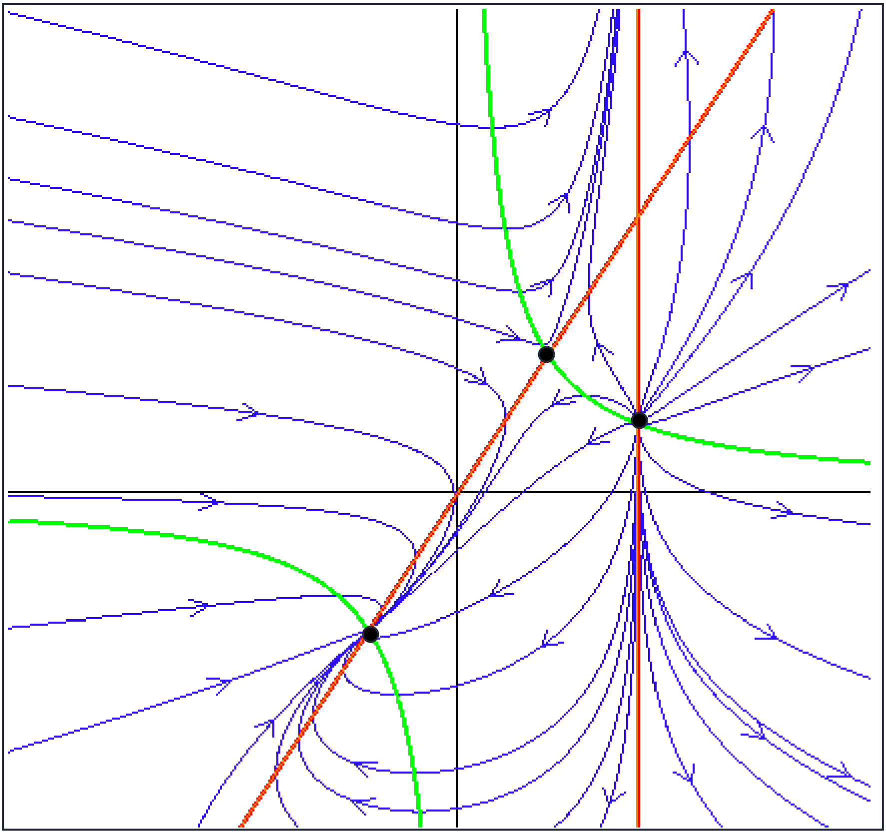


Рис. 2. Фазовый портрет системы (1)

---

2. *С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследуйте на устойчивость нулевое решение системы*:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x} - e^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y), \\ \dot{z} = \ln(1+z-3x); \end{cases}$$

В окрестности положения равновесия $\mathrm{P}(0,0,0)$ матрица линеаризованной системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы А:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 10) = 0.$$

Корни уравнения: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3i.$ Так как $\mathrm{Re}\,\lambda_{2,3} = 1 > 0$, то положение равновесия **неустойчиво**.

---

3. *Выясните, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое положение равновесия системы:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

В окрестности положения равновесия $\mathrm{P}(0,0)$ матрица линеаризованной системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a/e & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы А:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \left(\frac{a}{e} + 1\right)\lambda + \frac{a}{e} + b = 0.$$

Используя необходимое и достаточное условие устойчивости многочлена 2-го порядка, получим условия, при которых все корни характеристического уравнения имеют отрицательную вещественную часть, а значит и условия, при которых нулевое положение равновесия будет асимптотически устойчивым:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{e} + 1 < 0, \\ \dfrac{a}{e} + b > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-be < a < -e.}$$

Домашнее задание

1. Исследуйте на устойчивость положения равновесия следующих систем:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2(x-1)(y-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 - 4x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 8. \end{cases}$

2. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследуйте на устойчивость нулевое решение:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^{y}, \\ \dot{z} = -3y. \end{cases}$$

3. Выясните, при каких значениях параметров *a* и *b* асимптотически устойчиво нулевое положение равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + 9x + ay). \end{cases}$$