8 февраля (13 февраля) 2024 г.

Практическое занятие № 1

Простейшие задачи управления динамикой популяций

Задача 1

Пусть свободное развитие популяции описывается моделью Мальтуса

$$\dot{N} = \varepsilon N, \qquad (1)$$

где $N(t)$ – численность (или объем биомассы) популяции в момент времени t; ε - коэффициент прироста, $\varepsilon = const$.

Если $N(0) = N_0 \geq 0$, то $N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}$. Интегральные кривые уравнения (1), соответствующие различным начальным данным N_0, изображены на рис. 1. Качественное поведение решения зависит от знака коэффициента прироста ε.

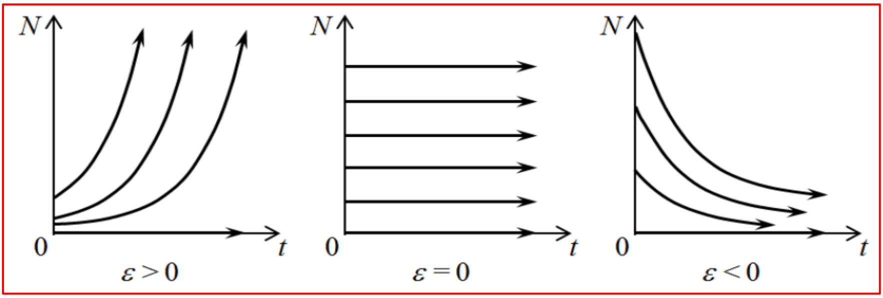


Рис. 1

1. Если $\varepsilon > 0$, то при $\forall N_0 > 0$ наблюдается неограниченный рост популяции.
2. Если $\varepsilon = 0$, то численность популяции сохраняется на начальном уровне.
3. Если $\varepsilon < 0$, то при $\forall N_0 > 0$ наблюдается вырождение популяции при $t \to +\infty$.

Под **управлением** $u(t)$ будем понимать **изъятие из популяции** некоторого количества особей (или биомассы). При этом динамика популяции описывается уравнением

$$\dot{N} = \varepsilon N - u(t). \qquad (2)$$

В случае, когда $u(t) = u_0 = \text{const}$, решение уравнения (2) с начальным условием $N(0) = N_0$ имеет вид $N(t) = \left(N_0 - \frac{u_0}{\varepsilon}\right)e^{\varepsilon t} + \frac{u_0}{\varepsilon}$, если $\varepsilon \neq 0$, и $N(t) = N_0 - u_0 t$, если $\varepsilon = 0$.

Интегральные кривые уравнения (2) изображены на рис. 2.

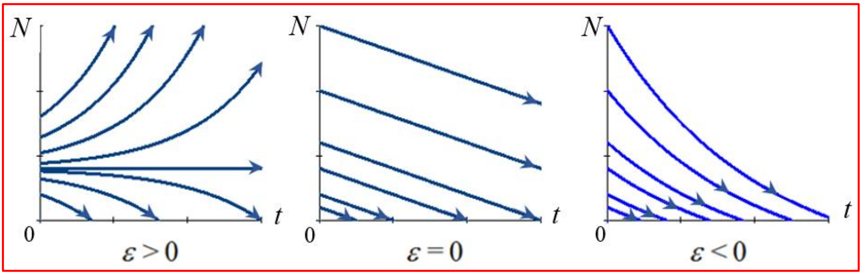


Рис. 2

1. Если $\varepsilon \leq 0$, то при любой начальной численности популяции наблюдается вырождение популяции за конечный промежуток времени.
2. Если $\varepsilon > 0$, то при $N_0 < u_0/\varepsilon$ популяция вырождается за конечный промежуток времени.

Задача 2

Пусть свободное развитие популяции описывается логистической моделью[1]

$$\dot{N} = (\varepsilon - \alpha N)N, \qquad (3)$$

где $N(t)$ – численность (или объем биомассы) популяции в момент времени t; ε - коэффициент прироста популяции без учета лимитирующих факторов, а α - некоторый параметр, учитывающий влияние их действия (например, коэффициент внутривидовой конкуренции). Причем предполагается, что ε, α являются положительными константами.

---

[1] Логистическая модель является обычной в экологии. Можно себе представить, например, что N – это количество рыб в озере или мировом океане.

Если $N(0) = N_0$, то

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-\varepsilon t}}, \text{ где } K = \frac{\varepsilon}{\alpha}. \qquad (4)$$

Очевидно, если $N_0 \neq 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = K$.

Домашнее задание

Показать, что решение задачи Коши для уравнения (3) определяется формулой (4).

Изучить тему: [Построение интегральных кривых и фазового портрета автономного уравнения]

Фазовый портрет и интегральные кривые уравнения (1), соответствующие различным неотрицательным начальным данным N_0, изображены на рис. 1[2].

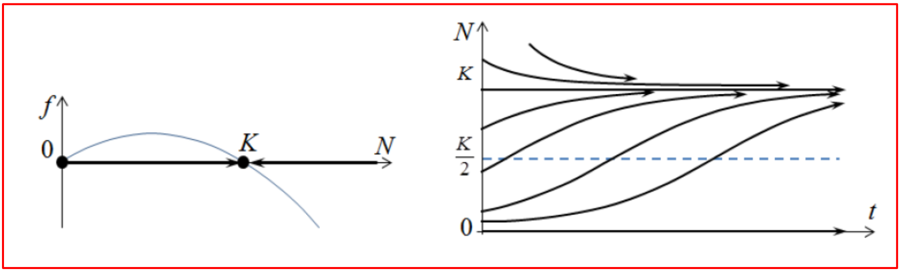


Рис. 1

Если нет управляющих воздействий на популяцию, то при любой ненулевой ее начальной численности наблюдается стабилизация численности на равновесном уровне $N = K$. Параметр K называют *емкостью среды*. Ненулевое положение равновесия является асимптотически устойчивым.

[2] См. метод построения фазового портрета и интегральных кривых автономного уравнения в http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/MathECO/Lections/Math_basic/Integr_curve_FP.pdf

22 февраля (27 февраля) 2024 г.

Под **управлением** $u(t)$ будем понимать **изъятие из популяции** некоторого количества особей (или биомассы). При этом динамика популяции будет описывается уравнением

$$\dot{N} = (\varepsilon - \alpha N)N - u(t). \qquad (2)$$

Не решая уравнение (2), в случае, когда $u(t) = u_0 = \text{const} > 0$, выясним, как будет изменяться численность популяции[3].

Интегральные кривые уравнения (2), иллюстрирующие эволюцию численности популяции, изображены на рис. 2.

При интенсивности изъятия $u_0 < \frac{\varepsilon K}{4}$ изменения численности состоят в следующем. Имеются два равновесных состояния, A и B. Состояние A устойчиво. Оно меньше, чем равновесное состояние K в системе без изъятия:

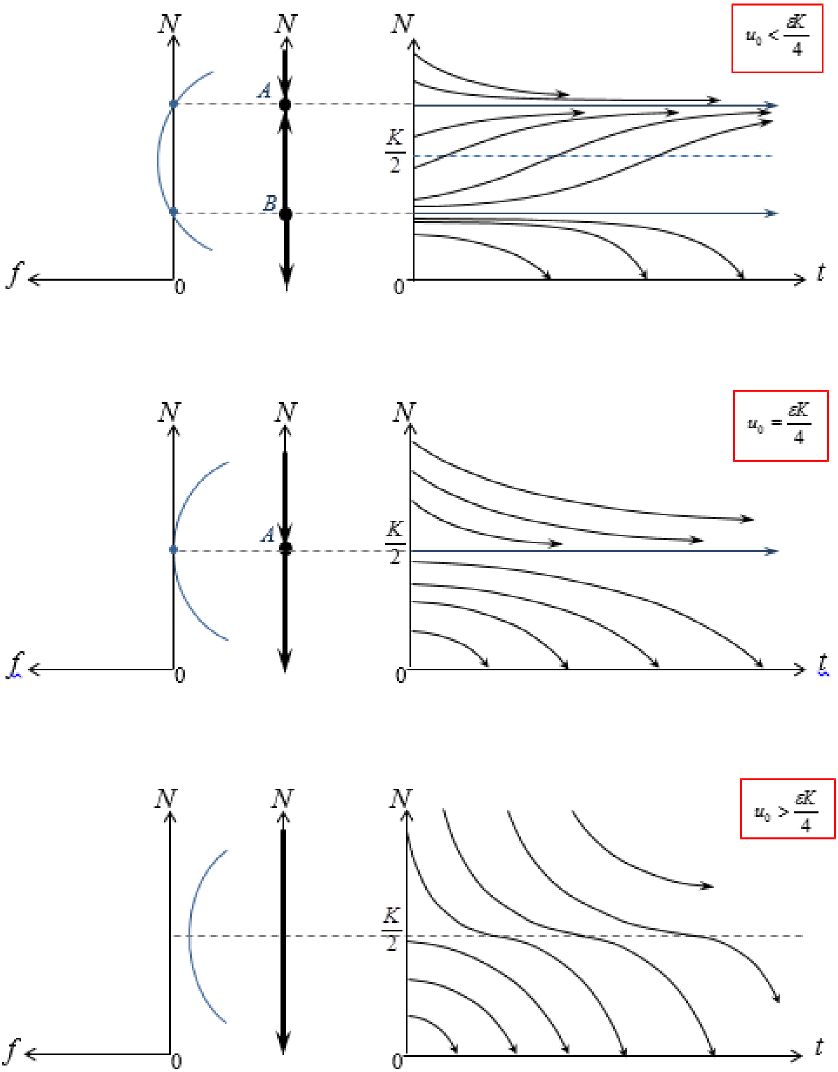
$$A = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4au_0}}{2\alpha} < \frac{\varepsilon}{\alpha} = K.$$

Популяция восстанавливается при малых отклонениях численности от равновесного значения A.

Состояние B неустойчиво: если вследствие каких-либо причин размер популяции упадет ниже уровня B, то в дальнейшем популяция (хотя и медленно, если отличие от B невелико) будет уничтожена полностью за конечное время.

При интенсивности изъятия $u_0 = \frac{\varepsilon K}{4}$ имеется одно положение равновесия: $A = B = \frac{K}{2}$, которое не является устойчивым (можно сказать, что оно полуустойчиво). Популяция уничтожается за конечное время, если численность популяции в какой-либо момент времени станет меньше A.

[3] Например, как сказывается рыболовство с постоянной интенсивностью на изменение численности рыб.



$$f = (\varepsilon - \alpha N)N - u_0, \quad K = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

Рис. 2. Фазовые портреты и интегральные кривые уравнения (2)

При интенсивности изъятия $u_0 > \dfrac{\varepsilon K}{4}$ популяция уничтожается за конечное время при любой ее начальной численности.

Таким образом, при некоторых значениях управляемого параметра u_0 (постоянная интенсивность изъятия) эксплуатация популяции может привести к полному ее уничтожению.

Изъятие с постоянной интенсивностью соответствует «жесткому планированию». Устойчивость эксплуатируемой системы можно восстановить, если заменить жесткое планирование обратной связью.

Домашнее задание

Выясните, как будет изменяться численность популяции, если $u(t) = \gamma N(t),\ \gamma = const > 0.$

Лекция - 16 февраля 2024 г.

Задача оптимизации переходного процесса

При разработке методов рациональной эксплуатации популяций возникают задачи поиска оптимальных режимов управления популяцией. Одной из таких задач является **задача оптимизации некоторого переходного процесса, в результате которого популяция переводится с одного стационарного режима эксплуатации на другой**. Эта задача может иметь смысл, например, для искусственного выращивания популяций рыб, при культивировании популяций микроорганизмов и т.д. Рассмотрим решение этой задачи на основе уравнения динамики численности популяции

$$\dot{N} = \varepsilon N - \gamma(t) N(t). \qquad (3)$$

которое учитывает изъятие из популяции, пропорциональное ее численности ($u(t) = \gamma(t) N(t)$ – управление (изъятие) осуществляется по принципу обратной связи).

Пусть первоначально популяция эксплуатируется в стационарном режиме, т. е.

$$N(t) = N_0 = const \quad \forall t \geq 0.$$

Такой режим реализуется при $\gamma(t) = \varepsilon \ \ \forall\ t \geq 0$. Объем изымаемой биомассы в единицу времени в этом случае равен εN_0.

Предположим, что возникает необходимость увеличить величину изъятия в n раз, перейдя на новый стационарный режим эксплуатации

$$N(t) = nN_0 = const \quad \forall t \geq 0.$$

Заметим, что даже свободной популяции (без управления) для увеличения численности в n раз нужно время:

$$T_0 = \frac{1}{\varepsilon}\ln n.$$

Сформулируем задачу определения оптимального управления (режима эксплуатации) $\gamma(t)$ в период $(0, T)$, за который численность популяции должна измениться в n раз. Так как $\gamma(t) \geq 0$, то, разумеется имеет смысл только $T \geq T_0$. Определим величину J общего объема изъятия за время переходного процесса T:

$$J = \int_0^T \gamma(t) N(t) dt. \tag{4}$$

Формулировка задачи оптимального управления. Отыскать оптимальное управление $\tilde{\gamma}(t)$, обеспечивающее при заданном времени переходного процесса T $(T > T_0)$ максимальную величину общего изъятия J.

Решение уравнения (3) с начальным условием $N(0) = N_0$ имеет вид:

$$N(t) = N_0 \exp\left(\varepsilon t - \int_0^t \gamma(\tau) d\tau\right). \tag{5}$$

Введем вспомогательную функцию

$$f(t) = \frac{N(t)}{N_0} = \exp\left(\varepsilon t - \int_0^t \gamma(\tau) d\tau\right) \tag{6}$$

с очевидными свойствами:

$$f(0) = 1, \qquad f(T) = n, \qquad 0 < f(t) \leq e^{\varepsilon t}, \ \forall t. \tag{7}$$

Подставив (5) в (4), выполним преобразование выражения для J, используя правило интегрирования по частям и введенную функцию $f(t)$:

$$J = N_0 \int_0^T \gamma(t) \exp\left(\varepsilon t - \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \right) dt = -N_0 \int_0^T e^{\varepsilon t} d\left(\exp\left(-\int_0^t \gamma(\tau) d\tau \right) \right) =$$

$$= N_0 \left(f(0) - f(T) + \varepsilon \int_0^T f(t) dt \right).$$

Учитывая свойства (7) функции $f(t)$, получим:

$$J = N_0 \left(1 - n + \varepsilon \int_0^T f(t) dt \right). \tag{8}$$

Очевидно, что вместо $\gamma(t)$ управляющей функцией можно считать $f(t)$. Нетрудно видеть, что решение задачи на максимум при ограничениях (7) дает функция, определенная на отрезке $[0, T]$, следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} e^{\varepsilon t}, & 0 \le t < T, \\ n, & t = T. \end{cases} \tag{9}$$

Для определения оптимального управления $\tilde{\gamma}(t)$, воспользуемся формулой (6). Откуда найдем:

$$\int_0^t \tilde{\gamma}(\tau) d\tau = \varepsilon t - \ln f(t) \overset{(9)}{=} \begin{cases} 0, & 0 \le t < T, \\ \varepsilon T - \ln n, & t = T \end{cases} = (\varepsilon T - \ln n) \chi(t - T),$$

где $\chi(t)$ – функция Хевисайда[4].

Дифференцируя полученное равенство, найдем

$$\tilde{\gamma}(t) = (\varepsilon T - \ln n) \delta(t - T), \tag{10}$$

где $\delta(t)$ – δ-функция Дирака[5].

---

[4] $\chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0. \end{cases}$

[5] http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/MathECO/Lections/Math_basic/Function_Dirak.pdf

При этом оптимальном управлении величина оптимизируемого функционала J будет равна:

$$J = N_0\left(1 - n + \varepsilon\int_0^T f(t)dt\right) \overset{(9)}{=} N_0(e^{\varepsilon T} - n). \qquad (11)$$

Найденный вид оптимального управления (10) означает, что следует прекратить эксплуатацию популяции на весь переходной период, а затем в момент времени $t = T$ изъять излишки, доведя численность популяции до величины $N_1 = nN_0$.