Устойчивость положений равновесия автономных систем (метод линеаризации Ляпунова, теорема Ляпунова)

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,y), \\ y'(t) = g(x,y), \end{cases} \qquad f, g \in C^2.$$

Поиск положений равновесия $P(x^*, y^*)$**:**

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Исследование на устойчивость по первому приближению[1]:

Положение равновесия $P(x^*, y^*)$ асимптотически устойчиво, если все собственные значения матрицы линеаризованной системы имеют отрицательную вещественную часть. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $P(x^*, y^*)$ неустойчиво.

Матрица линеаризованной системы

$$A = \begin{pmatrix} f_x'(x^*, y^*) & f_y'(x^*, y^*) \\ g_x'(x^*, y^*) & g_y'(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0. \qquad (*)$$

Условия асимптотической устойчивости положения равновесия

$$\operatorname{Re}\lambda_1 < 0,\ \operatorname{Re}\lambda_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tr A} < 0, \\ \mathrm{det A} > 0. \end{cases}$$

Положение равновесия асимптотически устойчиво, если все коэффициенты уравнения (*) положительны.

---

[1] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

Тип положения равновесия $P(x^*, y^*)$

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i \neq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$
узел	**седло**	**фокус**	**Центр или фокус** (нужны дополнитель-ные исследования)
$D \geq 0$ и $\det A > 0$	$\det A < 0$	$D < 0$ и $\mathrm{tr} A \neq 0$	$\det A > 0$ и $\mathrm{tr} A = 0$

Дискриминант характеристического уравнения (∗):

$$D = (\mathrm{tr}\,A)^2 - 4 \cdot \det A.$$

Пример

Для автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (2x - y)(x - 2), \\ \dfrac{dy}{dt} = xy - 2; \end{cases}$$

Найти все положения равновесия и исследуйте их на устойчивость.

Результаты:

1. <u>Положения равновесия</u> – являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} (2x - y)(x - 2) = 0, \\ xy - 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x - y = 0, \\ x - 2 = 0, \end{array}\right. \\ xy = 2. \end{cases}$$

Решив систему, найдем три положения равновесия:

$P_1(1; 2)$, $P_2(-1; -2)$, $P_3(2; 1)$.

2. <u>Определение типа точек</u>. В окрестности положения равновесия $P(x^*,y^*)$ матрица линеаризованной системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4x^* - y^* - 4 & 2 - x^* \\ y^* & x^* \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы A:

$$\lambda^2 + \lambda(4 - 5x^* + y^*) - 4x^* - 2y^* = 0.$$

P_i	Характеристическое уравнение	Корни характеристического уравнения	Тип точки
(1; 2)	$\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$	$\lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} > 0,$ $\lambda_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$	седло
(–1; –2)	$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0$	$\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -3$	устойчивый узел
(2; 1)	$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$	$\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = 3$	неустойчивый узел

Домашнее задание

I. Исследуйте на устойчивость положения равновесия следующих систем:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2(x-1)(y-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 - x^2; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 - 4x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 8. \end{cases}$