Лекция 4
Управляемость линейных систем

§1. Управляемость линейных нестационарных систем

Будем рассматривать управляемую систему, поведение которой описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u + f(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – непрерывные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, $f(t)$ – заданная функция, n-мерный вектор, описывающий неконтролируемые воздействия. Пусть для системы (1) множество допустимых управлений состоит из векторных функций $u(t)$, принадлежащих пространству $L_2^r(0,T)$, T – произвольное, но фиксированное число. $L_2^r(0,T)$ – пространство вектор-функций $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)\}$, определенных на промежутке $[0,T]$, элементы $u_i(t)$, $i = \overline{1,r}$, которых суммируемы со своими квадратами. Пространство $L_2^r(0,T)$ является гильбертовым, скалярное произведение в нем определяется формулой:

$$(u,v) = \int\limits_0^T \sum_{i=1}^r u_i(t)v_i(t)\,dt,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Определение 1. *Система (1) называется* **вполне управляемой** *на отрезке $[0,T]$, если для любых векторов x^1 и x^2 из фазового пространства $\Omega \subset R^n$ уравнения (1) можно указать управление $u = u(t,x^1,x^2)$, $t \in [0,T]$, из $L_2^r(0,T)$ такое, что решение задачи Коши*

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t,x^1,x^2) + f(t),\ 0 < t \leqslant T, \quad x(0) = x^1,$$

в момент времени $t = T$ удовлетворяет условию $x(T) = x^2$.

Определение 2. *Пара векторов (точек) x^1 и x^2 из фазового пространства $\Omega \subset R^n$ уравнения (1) называется* **управляемой** *на отрезке $[0,T]$, если существует управление $u = u(t,x^1,x^2)$, $t \in [0,T]$, из*

$L_2^r(0,T)$ такое, что решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t, x^1, x^2) + f(t), \quad 0 < t \leqslant T, \quad x(0) = x^1,$$

в момент времени $t = T$ удовлетворяет условию $x(T) = x^2$.

Пример 1. Определить, будет ли для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = x_2; \end{cases}$$

управляема на отрезке $[0,1]$ заданная пара точек:

а) $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -e \end{pmatrix}$; б) $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ e^2 \end{pmatrix}$.

Решение. Второе уравнение системы имеет решение

$$x_2(t) = x_2(0)e^t.$$

Тогда первое уравнение примет вид

$$\dot{x_1} = x_1 + x_2(0)e^t + 2u.$$

Проинтегрировав его, в результате получим решение заданной системы:

$$\begin{cases} x_1(t) = (x_1(0) + x_2(0)t)e^t + 2\int\limits_0^t u(s)e^{t-s}ds, \\ x_2(t) = x_2(0)e^t. \end{cases} \tag{$*$}$$

Для первой пары точек $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $x^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -e \end{pmatrix}$ при $t = 1$ будем иметь:

$$\begin{cases} -2 = 2e + 2e\int\limits_0^1 u(s)e^{-s}ds, \\ -e = e. \end{cases} \tag{$**$}$$

Очевидно, система $(**)$, рассматриваемая относительно управления $u(t)$, не имеет решения. Следовательно, первая пара точек не является управляемой на отрезке $[0,1]$.

Для второй пары точек $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}$ и $x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ e^2 \end{pmatrix}$ будем иметь:

$$\begin{cases} -1 = e + e^2 + 2e\int\limits_0^1 u(s)e^{-s}ds, \\ e^2 = e^2, \end{cases} \Leftrightarrow \int\limits_0^1 u(s)e^{-s}ds = -\frac{1 + e + e^2}{2e}.$$

Для полученного уравнения можно указать, например, такое решение:

$$u(t) = -\frac{1+e+e^2}{2e}e^t.$$

Следовательно, вторая пара точек является управляемой на отрезке $[0, 1]$.

Анализируя решение $(*)$, можно заметить, что для рассматриваемой системы управляемой на отрезке $[0, T]$ будет любая пара векторов $x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}$ и $x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$ из R^n, для которой выполнено условие $x_2^2 = x_2^1 \cdot e^T$. □

Система (1) вполне управляема на отрезке $[0, T]$, если каждая пара точек ее фазового пространства является управляемой на $[0, T]$. Вполне управляемая система обладает тем свойством, что с помощью соответствующего допустимого управления ее можно перевести из одного заданного состояния в другое, также заданное состояние.

Функция $f(t)$, входящая в уравнение (1), не зависит от управления. Поэтому, вводя новую переменную $y(t) = x(t) - \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – является решением задачи Коши

$$\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi + f, \quad \varphi(0) = 0,$$

получим, что уравнение (1) преобразуется к виду

$$\dot{y}(t) = A(t)y + B(t)u.$$

Поэтому, не ограничивая общности получаемых результатов, мы может исследовать задачу об управлемости системы (1), считая $f(t) \equiv 0$.

Итак, далее будем рассматривать управляемую систему:

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u, \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнение известно, что решение задачи Коши для уравнения (2) с начальным условием $x(0) = x^1$ можно представить в виде:

$$x(t) = K(t, 0)x^1 + \int\limits_0^t K(t, s)B(s)u(s)ds, \tag{3}$$

где $K(t,s)$ – матрица Коши уравнения $\dot{z}(t) = A(t)z$.

Для того чтобы это решение удовлетворяло условию

$$x(T) = x^2, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы управление $u(t)$ удовлетворяло условию

$$\int\limits_0^T K(T,s)B(s)u(s)\,ds = c, \tag{5}$$

где $c = x^2 - K(T,0)x^1$.

Таким образом, получаем, *что система (2) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любого вектора $c \in \Omega$ можно указать управление $u(t,c)$, удовлетворяющее условию (5).*

Используя этот результат, можно построить необходимые и достаточные условия полной управляемости. Для вывода этих условий введем следующие обозначения. Пусть $h_i(t)$ – строка матрицы $K(T,t)B(t)$, а c_i – i-я компонента вектора c. Тогда соотношение (5) можно записать в виде:

$$\int\limits_0^T h_i(t)u(t)\,dt = c_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Эти равенства будем называть *моментными соотношениями*, а числа c_i – *моментами.*

Теорема 1. *Для того чтобы система (2) была вполне управляема на отрезке $[0,T]$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-функции $h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)$ были линейно независимыми на этом отрезке.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система (2) вполне управляема на $[0,T]$ и, следовательно, для любых $x^1,\ x^2 \in \Omega$ существует управление $u(t)$, удовлетворяющее моментным соотношениям (6), т. е.

$$\int\limits_0^T h_i(t)u(t)\,dt = c_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Очевидно, что $u(t)$ зависит от x^1 и x^2. Однако этот факт при доказательстве теоремы подчеркивать не будем.

Обозначим через M_h конечномерное подпространство из $L_2^r(0,T)$, элементы которого $h(t)$ представимы в виде:

$$h(t) = \sum_{k=1} \alpha_k h_k^*(t), \tag{7}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – произвольные постоянные, а символ $*$ указывает на операцию транспонирования. Тогда в соответствии с теоремой[1] $u(t)$ можно представить в виде

$$u(t) = v(t) + w(t),$$

где $v(t) \in M_h,\ w(t) \perp M_h$. Будем называть $v(t)$ *проекцией* управления $u(t)$ на множество M_h. Из того, что $w(t) \perp M_h$, следует, что

$$\int\limits_0^T h_i(t) w(t)\, dt = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Учитывая, что функция $v(t)$ представима в виде (7), получаем:

$$\int\limits_0^T h_i(t)\big(v(t) + w(t)\big)\, dt = \int\limits_0^T h_i(t) v(t)\, dt = \int\limits_0^T h_i(t) \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k^*(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k \int\limits_0^T h_i(t) h_k^*(t)\, dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k (h_i, h_k) = c_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Таким образом, моментные соотношения (6) принимают вид:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (h_i, h_k) = c_i,\ i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Приходим к выводу: если x^1 и x^2 произвольно выбраны из Ω (следовательно, c_i также произвольны) и существует соответствующее им управление $u(t)$, удовлетворяющее моментным соотношениям (6), то проекция $v(t)$ (вида (7)) этого управления на M_h определяется с помощью постоянных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, которые находятся из системы (8).

[1] *Если M – замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства H, то любой элемент $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = y + z$, где $y \in M$ и $z \perp M$ (z ортогонален M).* [1], с. 185.

Эта система имеет решение при любых c_i. В противном случае при некоторых x^1 и x^2 отсутствует проекция (7) управления $u(t)$ на M_h, что невозможно в силу теоремы, на которую была ссылка выше. Поэтому определитель матрицы системы[2] (8):

$$\Delta = det\|(h_i, h_k)\| \neq 0.$$

Поскольку определитель Δ является определителем Грама вектор-функций $h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)$, то он отличен от нуля тогда и только тогда, когда эти функции линейно независимы [3].

Достаточность. Предположим, что вектор функции $h_i(t),\ i = \overline{1,n}$ линейно независимы, и пусть x^1 и x^2 выбраны произвольно, а значит, моменты $c_i,\ i = \overline{1,n}$, также произвольны. Управление $u(t)$, удовлетворяющее моментным соотношениям (6), будем искать в виде

$$u(t) = v(t) + w(t), \ \ v(t) \in M_h, \ \ w(t) \perp M_h, \tag{9}$$

где M_h – введенное выше конечномерное подпространство из $L_2^r(0,T)$.

Подставляя эту функцию в соотношения (6), получаем систему уравнений (8) для определения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Эта система однозначно разрешима, так как ее определитель отличен от 0 (как определитель Грама линейно независимых вектор-функций).

Таким образом, если система вектор-функций $h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)$ линейно независима на отрезке $[0,T]$, то моментные соотношения (6) имеют решение, которое представимо в виде (9), причем функция $v(t)$ определяется по формуле (7), где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ находятся из системы (8), $w(t)$ – произвольная вектор-функция из пространства $L_2^r(0,T)$, ортогональная M_h. $\square$

Легко показать, что определитель Грама является определителем матрицы

$$\int\limits_0^T K(T,t)B(t)B^*(t)K^*(T,t)\,dt. \tag{10}$$

Тогда необходимые и достаточные условия полной управляемости системы (2) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

[2]Здесь запись $\|a_{ik}\|$ используется для сокращенного обозначения квадратной матрицы размерности $n \times n$ с элементами $a_{ik},\ i,k = \overline{1,n}$.

Теорема 2. *Для того чтобы система (2) была вполне управляема на отрезке* $[0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы (10) был отличен от нуля, т. е. матрица (10) была неособой.*

Установленный критерий, однако, не совсем удобен для практической реализации, так как построение функций $h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)$ и проверка их линейной независимости представляют довольно громоздкую работу (в частности, нахождение матрицы Коши обычно оказывается сложной задачей). Имеются более простые критерии, использующие лишь исходную информацию о системе, даваемую матрицами $A(t)$ и $B(t)$. Особенно простым будет критерий для стационарных систем.

§1. Управляемость линейных стационарных систем

Будем рассматривать управляемую систему:

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{11}$$

где матрицы A и B являются постоянными.

Известно, что фундаментальной матрицей $\Phi(t)$ решений уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax, \tag{12}$$

нормальной при $t = 0$ (т. е. $\Phi(0) = E$) является

$$\Phi(t) = e^{At}.$$

Поэтому решение уравнения (11), удовлетворяющее условию $x(0) = x^1$, можно записать в виде:

$$x(t) = e^{At} \cdot x^1 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds.$$

Если управление $u(t)$ обеспечивает переход из состояния (1) к моменту времени $t = T$ в состояние $x(T) = x^2$, то моментные соотношения (6) принимают вид

$$\int\limits_0^T e^{-At} Bu(t)\, dt = c, \tag{13}$$

где

$$c = e^{-AT}x^2 - x^1.$$

Матрицу e^{-At} можно определить исходя из представления функции e^{-At} в виде степенного ряда ([3], с. 113):

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(-t)^k}{k!}.$$

Попытаемся получить «конечное» представление матричной экспоненты.

Характеристический многочлен матрицы A

$$\chi(A) = |\lambda E - A| = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n$$

по теореме Гамильтона-Кэли[3] является аннулирующим, т. е.

$$\chi(A) = A^n + p_1A^{n-1} + ... + p_{n-1}A + p_nE = 0_{n\times n}.$$

Откуда будем иметь

$$A^n = -p_1A^{n-1} - p_2A^{n-2} - ... - p_{n-1}A - p_nE.$$

Следовательно, n-я степень A^n является линейной комбинацией матриц $E, A, A^2, ..., A^{n-1}$. Можно показать, что и A^{n+1} обладает таким же свойством:

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = A \cdot (-p_1A^{n-1} - p_2A^{n-2} - ... - p_{n-1}A - p_nE) =$$

$$= -p_1A^n - (p_2A^{n-1} - ... - p_{n-1}A^2 - p_nA) =$$

$$= -p_1(-p_1A^{n-1} - p_2A^{n-2} - ... - p_{n-1}A - p_nE) - ...$$

Применяя этот процесс для A^j, $j \geqslant n$, получим для матрицы e^{-At} следующее формальное представление:

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(-t)A^k. \tag{14}$$

[3]**Теорема Гамильтона-Кэли.** *Всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.* ([3], с. 90.

где $\alpha_j(t)$ – «собранные коэффициенты» при степенях A^j. Можно показать, что в представлении матричной экспоненты в виде комбинации матриц $E, A, A^2, ..., A^{n-1}$, коэффициенты $\alpha_k(-t),\ k = \overline{0, n-1}$, являются квазиполиномами. Доказательство этого факта см., например, в [7]. Кроме того, функции $\alpha_0(-t), \alpha_1(-t), ..., \alpha_{n-1}(-t)$ являются линейно независимыми ([2], с. 77).

Используя представление e^{-At} в виде «конечного» ряда (14), моментные соотношения (13) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^T \alpha_k(-t)\, u(t)\, dt = c. \tag{15}$$

Обозначая через U вектор с компонентами (их количество nr)

$$\begin{cases} U_1 = \int\limits_0^T \alpha_0(-t) u_1(t)\, dt,\ \dots, U_r = \int\limits_0^T \alpha_0(-t) u_r(t)\, dt, \\ U_{r+1} = \int\limits_0^T \alpha_1(-t) u_1(t)\, dt,\ \dots, U_{2r} = \int\limits_0^T \alpha_1(-t) u_r(t)\, dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_{(n-1)r+1} = \int\limits_0^T \alpha_{n-1}(-t) u_1(t)\, dt,\ \dots, U_{nr} = \int\limits_0^T \alpha_{n-1}(-t) u_r(t)\, dt, \end{cases} \tag{16}$$

а через W матрицу

$$W = \{B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\}, \tag{17}$$

равенство (15) запишем в виде

$$WU = c. \tag{18}$$

Обозначив через w_k – k-й столбец матрицы W, равенству (18) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{nr} U_k w_k = c. \tag{19}$$

Это равенство, означает, что произвольный вектор $c \in R^n$ представляет собой комбинацию векторов $w_1, w_2, ...w_{nr}$, размерность каждого из которых равна n. Такое представление возможно в том и только том случае, когда ранг матрицы W равен n.

Так как $m = rn \geqslant n$, то числа $U_1, U_2, ..., U_m$ определяются из (19), вообще говоря, неоднозначно. Однако, их неоднозначность и не требуется. Важно, что эти числа существуют. Каждый их набор определяет с помощью соотношений (16) функции $u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$.

Действительно, пусть найдено какое-нибудь решение $U_1, U_2, ..., U_m$ системы (15). Тогда равенства (16) можно рассматривать как моментные соотношения относительно функций $u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$. При этом их можно разбить на группы. К первой группе относим моментные соотношения относительно функции $u_1(t)$, ко второй – относительно $u_2(t)$ и т. д. Согласно теореме 1 первая группа этих отношений

$$\begin{gathered} U_1 = \int_0^T \alpha_0(-t)u_1(t)\,dt,\ U_{r+1} = \int_0^T \alpha_1(-t)u_1(t)\,dt,\ \ ..., \\ U_{(n-1)r+1} = \int_0^T \alpha_{n-1}(-t)u_1(t)\,dt, \end{gathered} \tag{20}$$

определяет $u_1(t)$, так как функции $\alpha_0(-t), \alpha_1(-t), ..., \alpha_{n-1}(-t)$ линейно независимы. Действительно, будем искать функцию $u_1(t)$ в виде

$$u_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \alpha_k(-t). \tag{21}$$

Подстановка выражения (21) в соотношения (20) дает систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \int\limits_0^T \alpha_j(-t)\alpha_k(-t)dt = U_{j\cdot r+1}, \quad j = \overline{0, n-1},$$

которая имеет единственное решение $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$, так определитель матрицы системы отличен от нуля как определитель Грама линейно независимых функций $\alpha_0, \alpha_2, ...\alpha_{n-1}$.

Аналогично из других групп соотношений последовательно находим функции $u_2(t), ..., u_r(t)$.

Полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3. (Критерий управляемости Калмана) *Линейная стационарная система (11) вполне управляема на отрезке* $[0, T]$ *тогда и только тогда, когда матрица (17) имеет ранг, равный* n.

Матрицу W называют *матрицей управляемости*, или матрицей Калмана.

Пример 2. При каких значениях параметров β, γ система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3 + \gamma u, \\ \dot{x}_3 = x_1, \\ \dot{x}_4 = -\beta x_3 + u \end{cases}$$

полностью управляема.

Решение. Так как

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

то матрица управляемости имеет вид:

$$W = \{B, AB, A^2B, A^3B\} = \begin{pmatrix} 0 & \beta\gamma & 0 & \beta\gamma(\beta+1) \\ \gamma & 0 & \beta\gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\beta^2\gamma \end{pmatrix}$$

Система полностью управляема, если ранг матрицы W равен 4, что равносильно условию $\det W \neq 0$. Найдя определитель матрицы W, будем иметь:

$$\det W = \beta^3\gamma^3(\beta\gamma - 1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta \neq 0, \\ \gamma \neq 0, \\ \beta\gamma \neq 1. \end{cases}$$

□

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

2. Егоров А. И. Основы теории управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 504 с.

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 560 с.

4. Жабко А. П., Прасолов А. В., Харитонов В. Л. Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений. – М.: Высш. школа, 2003. – 286 с.

5. Мороз А. И. Курс теории систем. – М.: Высш. школа, 1987. – 304.

6. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 384 с.

7. Заика Ю. В. Дифференциальные уравнения. Курс лекций. – Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2012. – 215 с.