1 февраля 2017 г.

Лекция № 1

Понятие об управляемых системах. Математические описание управляемых систем. Классификация управляемых систем

Введение

Теория управления представляет собой довольно обширную область науки. Она находит применение в различных сферах человеческой деятельности, начиная с управления конкретными объектами и кончая управлением в области политики и общественных отношений. Во всех этих сферах работаю свои законы, определяющие динамику соответствующих систем. Взаимодействие материальных точек и системы твердых тел описываются законами механики, которые достаточно хорошо изучены. Известны также законы молекулярного и атомного взаимодействия, тепло и массопереноса. Во многих случаях они выражаются четкими математическими соотношениями. Тогда основные понятия теории управления и свойства управляемых систем можно сформулировать в математических терминах и на этой основе получать новые закономерности в достаточно общем виде.

Гораздо сложнее ситуация в сфере политики и общественных отношений. Математические зависимости в этой сфере человеческой деятельности удается получить лишь в отдельных случаях.

Основной целью изучения дисциплины[1] является: изучение основных понятий и методов математической теории управления динамическими системами; приобретение навыков решения практических задач; ознакомление с методологией современной математической теории управления эволюционными процессами.

Изучаемые математические методы исследования будут касаться тех задач управления, которые формулируются для процессов, описываемых в форме тех или иных уравнений с соответствующими дополнительными условиями.

---

[1] Учебно-методические материалы дисциплины публикуются на сайте http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Theory_Uprav/

1. Понятие управляемых систем

Под ***управляемой системой*** обычно понимается любая совокупность материальных (информационных) объектов, на поведение которой во времени можно влиять выбором целенаправленных воздействий.

Возможность такого выбора отличает управляемую систему от неуправляемой.

> *Брошенный со скалы камень летит по траектории, которая однозначно определяется его положением и скоростью в момент броска. Однако траектория полета дельтаплана существенным образом зависит от действий спортсмена в процессе полета. Эти действия целенаправленны, и поэтому движение дельтаплана является управляемым.*

Математически управляемая система характеризуется двумя группами параметров. К первой группе относятся те параметры, которые однозначно определяют состояние системы. Их обычно обозначают x, y или z. Поведение рассматриваемой системы характеризуется функцией (вектор-функцией) $x = x(t)$. Важно отметить, что для различных систем целесообразно считать время (параметр t), изменяющимся непрерывно или дискретно.

Если x – конечномерный вектор евклидова пространства E^n, то функция $x = x(t)$ при непрерывном изменяющемся времени определяет некоторую линию в E^n. Ее называют *фазовой траекторией* системы. Часто этот же термин используется и в случае, когда t принимает дискретные значения. Процесс перехода из одного состояния в другое состояние называют *переходным процессом*.

Вторая группа параметров (их совокупности обычно обозначают через u) определяет внешние управляющие воздействия. Их называют ***рулями***, *управлениями* или *управляющими параметрами*. Поведение рулей во времени определяется функцией $u = u(t)$.

Пара $(x(t), u(t))$ называется ***управляемым процессом***. Часто термины «управляемый процесс» и «управляемая система» употребляются для обозначения одних и тех же понятий.

Рассмотрим несколько примеров управляемых процессов, для которых используется различное математическое описание.

Пример 1. Согласно второму закону Ньютона движение материальной точки массы m в пространстве можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F_1, \\ m\ddot{x}_2 = F_2, \\ m\ddot{x}_3 = F_3, \\ 0 < t < T, \end{cases} \tag{1}$$

где F_1, F_2, F_3 – проекции вектора $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ внешних сил на соответствующие оси декартовой системы координат.

Если функция $F = F(t)$ – задана, то состояние (положение) движущегося объекта в каждый момент времени t однозначно определяется начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad \dot{x}(t_0) = x_i^1, \quad i = \overline{1,3}. \tag{2}$$

Чтобы определить это состояние, достаточно проинтегрировать уравнения (1) с условиями (2) на отрезке $[t_0, T]$. Однако в реальных условиях часто встречаются ситуации, когда сила F заранее не задана, а ее величина и направление выбираются во время движения объекта в зависимости от тех или иных конкретных целей и возникающих условий.

Состояние объекта в произвольный момент времени $t = \tau$ определяется набором шести параметров:

$$X_1 = x_1(\tau), \quad X_2 = \dot{x}_1(\tau), \quad X_3 = x_2(\tau), \quad X_4 = \dot{x}_2(\tau),$$
$$X_5 = x_3(\tau), \quad X_6 = \dot{x}_3(\tau).$$

Параметры u_1, u_2, u_3, заданные соотношениями:

$$u_1 = F_1(\tau), \quad u_2 = F_2(\tau), \quad u_3 = F_3(\tau),$$

определяют управление.

Функции $X_i = X_i(t), \quad t > t_0, \quad i = \overline{1,6},$ характеризуют поведение управляемого объекта во времени, а функции $u_i = u_i(t), \quad i = \overline{1,3},$ определяют поведение «рулей». Связь между этими функциями однозначно определяется системой дифференциальных уравнений (1) и представляется в виде:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_3 = X_4. \\ \dot{X}_5 = X_6, \\ \dot{X}_2 = \frac{1}{m} u_1, \\ \dot{X}_4 = \frac{1}{m} u_2, \\ \dot{X}_6 = \frac{1}{m} u_3. \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, в рассмотренном примере управляемым объектом является материальная точка массы m, а управляемым процессом – пара $(X(t), u(t))$, где $X(t)$ – вектор-функция размерности 6, а $u(t)$ – вектор-функция размерности 3. Параметр t (время) изменяется непрерывно, а процесс описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пример 2. Пусть некоторое тело $\overline{\Omega}$ находится в температурном поле и предположим, что внутри тела тепло распространяется согласно закону Фурье, а его теплообмен с внешней средой подчиняется закону Ньютона. Для описания процесса распространения тепла в теле введем обозначения: $u(M, t)$ – температура в точке $M \in \overline{\Omega}$ в момент времени $t \geq t_0$, а u_0 – температура внешней среды у границы тела.

Если заданы температура u_0 и интенсивность f внутренних источников тепла, то температура тела в любой его точке и в любой момент времени $\tau \geq t_0$ однозначно определяется начальным температурным полем тела в момент времени $t = t_0$:

$$u\big|_{t=t_0} = \varphi_0(M), \quad M \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

Процесс распространения тепла в теле описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f, \quad M \in \Omega, \quad t > t_0, \tag{5}$$

с граничным условием

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = h\left[u_0(M,t) - u(M,t)\right], \quad M \in S, \tag{6}$$

где k – коэффициент теплопроводности, n – направление внешней нормали к границе S области Ω, h – коэффициент теплообмена. Для определения температуры u в любой точке $M \in \Omega$ и в любой момент времени t достаточно решить уравнение (5) с граничным условием (6) и начальным условием (4).

Процессом можно управлять путем целенаправленного изменения плотности внутренних источников $f(M, t)$ и/или изменением температуры окружающей среды $u_0(M, t)$. В этом случае состояние управляемого объекта в произвольный момент времени $t = \tau$ характеризуется функцией $u(M, \tau)$. Изменение этой функции с течением времени определяет «траекторию» управляемого объекта. Параметром управления является вектор-функция $v(M,\tau) = \{f(M,\tau), u_0(M,\tau)\}$. Управляемым процессом в этом случае является пара $\left(u(M,t), v(M,t)\right)$, и он описывается краевой задачей (4) – (6).

Пример 3. Рассмотрим процесс накопления суммы на банковском счете. Подсчитаем величину вклада с учетом процентов через полных t лет при условии годовой капитализации и процентной ставки p %. Кроме того, пусть в конце каждого года вкладчик пополняет счет на некоторую сумму.

Если обозначить через $S(t)$ величину вклада с учетом процентов через t лет, то

$$S(t+1) = (1+p)S(t) + u(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

где $u(t)$ – сумма вложения в конце t-го года.

Если функция $u = u(t)$ – задана, то состояние счета на конец t-го года однозначно определяется начальным условием

$$S(0) = S_0. \tag{8}$$

Однако функцию $u(t)$ можно не задавать заранее, а рассматривать ее как управление. Тогда, выбирая значения u для каждого конкретного года, можно целенаправленно изменять значение $S(t)$ при заданном S_0. В этом случае управляемым процессом является пара $\big(S(t), u(t)\big)$, в которой время принимает дискретные значения, а сам процесс описывается разностным уравнением (7) с начальным условием (8). Фазовая траектория представляет собой набор точек $S(0), S(1), S(2), \ldots$ на прямой S.

Рассмотренные примеры иллюстрируют тот факт, что управляемые процессы могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями, краевыми математической физики, уравнениями в конечных разностях (разностными уравнениями) и др.

Эти уравнения обычно используют для описания различных явлений природы, технологических процессов. Однако в теории управления они имеют одну важную особенность:

> одна или несколько функций, характеризующие внешние возмущения, заранее не заданы. Они могут выбираться целенаправленно в процессе функционирования системы и играют роль управлений.

Классификация управляемых процессов дается по различным признакам. В зависимости от типа фазового пространства и типа уравнения, которым описывается процесс выделяют: *процесс с сосредоточенными параметрами* и *процесс с распределенными параметрами.*

Управляемый процесс $(x(t), u(t))$ называется ***процессом с сосредоточенными параметрам*** (или ***конечномерным***), если фазовое пространство параметров x является конечномерным. Если же это пространство является пространством функций, то процесс называется ***процессом с распределенными параметрами*** (или ***бесконечномерным***).

Процессы, рассмотренные в примерах 1 и 3, конечномерны, а процесс из примера 2 имеет распределенные параметры.

Управляемый процесс $(x(t), u(t))$ называется ***непрерывным*** или ***дискретным*** в зависимости от того, непрерывно или дискретно изменяется параметр t.

2. Принцип управления

Существует подход к классификации управляемых систем, основанный на понятии структурной схемы управляемой системы.

Тот факт, что для каждого управляемого объекта воздействие $u(t)$ порождает функцию $x(t)$, схематически представлен на рис. 1. Прямоугольник изображает *объект управления* (ОУ), $u(t)$ называется *сигналом на входе*, $x(t)$ – *сигналом на выходе*. При таком изображении управляемого процесса $(x(t), u(t))$ не указана форма связи $x(t)$ и $u(t)$. Известно лишь, что на вход объекта управления подается сигнал $u(t)$, а на его выходе появляется сигнал $x(t)$.

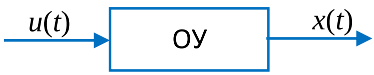

Рис. 1

Часто на схеме указывается не только управляющий сигнал $u(t)$, но и другие неконтролируемые внешние воздействия, которые влияют на объект во время его движения (функционирования). На рис. 2 они отмечены сигналом $r(t)$.

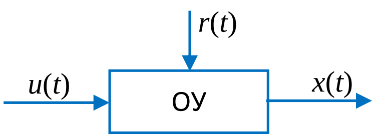

Рис. 2

До сих пор предполагалось, что управляющий сигнал $u(t)$ выбирается в зависимости от времени t в процессе функционирования системы. Величины всех компонент этого сигнала определяются исключительно моментом времени, в который он должен быть подан на вход системы. Такое управление называется ***программным***. Однако на практике особый интерес представляют управления, которые строятся на иных принципах. Суть их состоит в следующем.

Главная особенность управляемой системы состоит в том, что в каждый момент времени t управляющий сигнал $u(t)$ выбирается так, чтобы сигнал $x(t)$ на выходе системы обладал каким-то заданным свойством. Поэтому естественно стремиться выбирать сигнал $u(t)$ с учетом состояния системы в момент времени t.

Иначе говоря, требуется выбирать управление вида $u = u(t, x(t))$. Схематически такой способ управления изображен на рис. 3. Прямоугольник УУ (управляющее устройство) схематически изображает объект, у которого x является сигналом на входе, а u – сигналом на выходе. Тип такого объекта, а также способ преобразования сигнала x в сигнал $u(t, x(t))$ определяется конкретной ситуацией и представленной схемой не учитывается.

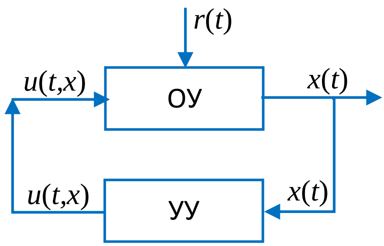

Рис. 3

Однако в схеме отмечается то важное обстоятельство, что сигнал u порождает сигнал x, а при формировании u учитывается $x(t)$.

Таким образом в представленной схеме явно выражена не только прямая связь ($x(t)$ зависит от $u(t)$), но и обратная связь (x определяет u). Такой способ управления называется ***управлением по принципу обратной связи.***

Система управления, схема которой представлена на рис.3, называется ***замкнутой системой управления***, а система, которая изображена на рис. 2, называется ***системой программного управления*** (***разомкнутой***).

Пример 1. Спортсмен, летящий на дельтаплане, принимает решение по управлению аппаратом в каждый конкретный момент времени, оценивая обстановку именно в этот момент времени. В эту его оценку входит определение положения и скорости аппарата, а также определение влияния внешних сил. Здесь управляющее устройство системе аппарат-спортсмен состоит из самого спортсмена и тех рулей, с помощью которых он влияет на полет аппарата. Спортсмен фиксирует фазовое состояние $x(t)$ дельтаплана и с помощью соответствующих устройств выдает управляющее воздействие $u = u(t, x(t))$. Главной особенность этой системы – участие человека в формировании управляющего воздействия. Т. е. человек – один из элементов УУ.

Если управляющее устройство работает без участия человека, то система управления называется ***автоматической***.

Системы управления, которые предназначены для поддержания некоторого параметра x на заданном уровне, называются ***системой регулирования***.

Примером автоматического регулятора, работающего по принципу обратной связи является регулятор Ползунова[2].

Пример 2. Регулятор Ползунова[3] предназначен для поддержания постоянного уровня воды в паровом котле. Упрощенная схема системы представлена на рис. 4. Система состоит из парового котла (ОУ), в который входят две трубы T_1 и T_2. На поверхности воды в котле плавает поплавок П, который с помощью стержней l_1 и l_2 соединен с клапаном К. Этот клапан регулирует поступление воды в котел по трубе T_1. По трубе T_2 отводится пар. Если по каким-либо причинам уровень воды в котле понизится ниже номинала, то поплавок П опускается и с помощью стержней l_1 и l_2 открывается клапан К. В результате увеличивается поступление воды в котел. Если же уровень воды повышается выше номинала, то поплавок поднимается и клапан К

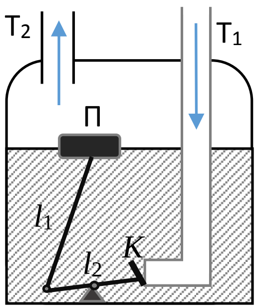

Рис. 4

[2] **Иван Иванович Ползунов** (14 марта 1728, Екатеринбург — 27 мая 1766, Барнаул) — русский изобретатель, создатель первой в России паровой машины и первого в мире двухцилиндрового парового двигателя.
[3] http://www.bestreferat.ru/referat-213569.html

уменьшает поступление воды. В этой системе регулируемой величиной является h – глубина воды в котле. Чувствительным элементом является поплавок. Стержень l_1 представляет собой задающее устройство. Его длина определяет стационарный уровень h. Стержень l_2 вместе с упором является преобразующим и усиливающим элементом, а клапан К является исполнительным механизмом.

3. Основная задача теории управления

Создание реальных систем управления неизбежно связано с решением целого комплекса разнообразных задач. Одни из них являются чисто инженерными (выбор материала для различных элементов системы, определение средств защиты от коррозии и помех и т. д.) Вместе с тем возникают и теоретические вопросы, для решения которых следует применять математические методы. Непосредственное отношение к теории управления имеют следующие вопросы.

1. Математический анализ управляемой системы требует прежде всего создания математической модели. При этом требуется не только получить уравнение движения (поведения) системы, но и дать достаточно полное описание целей управления и разнообразных ограничений, предъявляемых к системе и к ее модели.
2. После того как завершено математическое описание, необходимо исследовать управляемый процесс с целью поиска того поведения системы, которое удовлетворяет поставленным целям и ограничениям. Итогом такого исследования обычно является получение управления в виде $u = u(t, x(t))$. Подставляя его в уравнение движения системы, получим уравнение замкнутой системы относительно фазовой переменной x. Это уравнение должно быть дополнительно исследовано на предмет поиска периодических решений, устойчивости, непрерывной зависимости от параметров и т.д.

Лишь после выполнения таких исследований специалист по теории управлений может дать заключение по конструированию и эксплуатации системы.

Таким образом, основная задача математической теории управления состоит в математическом исследовании специфических задач, связанных с созданием и эксплуатацией управляемых систем.

Использованная и рекомендуемая литература

1. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 504 с.
2. Неймарк Ю.И. Коган Н.Я., Савельев В.П. Динамические модели теории управления. М.: Наука, 1985. – 400 с.
3. Леонов Г.А. Теория управления. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. – 233 с.
4. Босс В. Лекции по теории управления. Т. 1: Автоматическое регулирование. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 216 с.