Понятие устойчивого многочлена. Критерий Рауса – Гурвица

Вопрос об устойчивости положения равновесия динамической системы сводится (при весьма общих предположениях) к вопросам о корнях характеристического уравнения линеаризованной системы:

1) Лежат ли все корни в левой полуплоскости комплексной плоскости?
2) Лежат ли все корни внутри круга единичного радиуса?

Рассматриваемое при этом характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{1}$$

Ответ на первый вопрос связан с понятием устойчивого многочлена.
Определение 1. Многочлен с вещественными коэффициентами a_i:

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n, \quad a_0 > 0, \tag{2}$$

называется *устойчивым,* если все его нули λ_j лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости λ, т. е. $Re\lambda_j < 0,\ j = \overline{1,n}$.

Положительность (при $a_0 > 0$) всех коэффициентов многочлена (2) является необходимым условием устойчивости многочлена.

Теорема Стодолы [1]. *Если многочлен (2) с вещественными коэффициентами устойчив, то (при $a_0 > 0$) все его коэффициенты положительны.*

Для многочленов первой и второй степени необходимое условие устойчивости является и достаточным.
Теорема. *Многочлен первой и второй степени (с вещественными коэффициентами и при $a_0 > 0$) тогда и только тогда устойчив, когда все его коэффициенты положительны* [1].

Необходимое и достаточное условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (1) дали Раус и независимо от него Гурвиц.

Критерий Рауса – Гурвица. *Для того чтобы все корни уравнения (1) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы*

Гурвица

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

были положительными.

Матрица Гурвица имеет размерность $n \times n$ и составляется следующим образом. По главной диагонали располагаются коэффициенты многочлена (2) начиная с a_1 до a_n. Столбцы с нечетными номерами состоят из коэффициентов a_i с нечетными индексами, столбцы с четными номерами состоят из элеменов a_i с четными индексами, включая a_0. Все недостающие элементы заполняются нулями.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица вычисляются так:

$$\triangle_1 = a_1, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, условия Рауса–Гурвица принимают вид:

$$\triangle_1 > 0, \quad \triangle_2 > 0, \quad \dots, \quad \triangle_n > 0.$$

Методы исследования многочленов на устойчивость подробно рассматриваются в работах [1, 2].

Известно, что комплексная функция

$$\lambda = \frac{w+1}{w-1}$$

отображает внутренность единичного круга плоскости λ на левую полуплоскость плоскости w. Корням характеристического уравнения (1), лежащим внутри единичного круга $|\lambda| < 1$ (т. е. по модулю меньшим единицы), будут соответствовать корни преобразованного уравнения

$$a_0(w+1)^n + a_1(w+1)^{n-1}(w-1) + \ldots + a_n(w-1)^n = 0$$

или

$$b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \ldots + b_n = 0, \tag{3.3}$$

лежащие в левой полуплоскости плоскости w. Вопрос о расположении корней уравнения (3) может быть решен с помощью, например, критерия Рауса–Гурвица.

Задачи и упражнения

1. Исследуйте на устойчивость следующие многочлены:

1) $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$;
2) $\lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3$;
3) $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1$.

2. При каких значениях $\alpha \in R$ многочлены будут устойчивыми?

1) $\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + 2\lambda + 1$;
2) $\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + \alpha\lambda + 3$;
3) $\lambda^4 + 3\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + 2\lambda + 1$.

3. При каких значениях $\alpha \in R$, $\beta \in R$ будут устойчивыми многочлены?

1) $\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + 2\lambda + \beta$;
2) $\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 3$;
3) $\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + 2\lambda^2 + \beta\lambda + 1$.

4. Какой вид примут условия Рауса–Гурвица для уравнений с вещественными коэффициентами?

1) $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$;
2) $\lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + p\lambda + 1 = 0$.

5. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы корни уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ находились в единичном круге $|\lambda| < 1$.

6. Выясните, будут ли все корни следующих уравнений находиться в единичном круге $|\lambda| < 1$:

1) $11\lambda^4 - 8\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$;
2) $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda = 0$;
3) $7\lambda^4 - 4\lambda^3 + 30\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$;
4) $\lambda^5 - \lambda^2 - 1 = 0$.

Литература

1. Постников М. М. Устойчивые многочлены / М. М. Постников. М.: Наука, 1981. 176 с.

2. Чернецкий В. И. Математическое моделирование динамических систем / В. И. Чернецкий. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1996. 432 с.