# Устойчивость положений равновесия автономных динамических систем

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN_i}{dt} = f_i(N_1, N_2, ..., N_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

или в векторной записи

$$\frac{dN}{dt} = f(N), \quad N = (N_1, N_2, ..., N_n). \tag{2}$$

Пусть $f_i$ и $\frac{\partial f_i}{\partial N_k}$ непрерывны для $\forall t \in [t_0; +\infty)$, $i, k = 1, 2, ..., n$.

Решение $N = \tilde{N}(t)$ системы (2) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого решения $N(t)$ системы (2), начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$\|N(t_0) - \tilde{N}(t_0)\| < \delta, \tag{3}$$

при всех $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство

$$\|N(t) - \tilde{N}(t)\| < \epsilon.$$

Решение $\tilde{N}(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближаются к $\tilde{N}(t)$ при $t \to +\infty$, т. е. из неравенства (3) следует $\|N(t) - \tilde{N}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Вопрос об устойчивости данного решения $N = \tilde{N}(t)$ системы (2) сводится к вопросу об устойчивости нулевого решения $x(t) \equiv 0$ другой системы, получаемой из уравнения (2) заменой искомой функции $N(t) - \tilde{N}(t) = x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$, $F(x) = f(x(t) + \tilde{N}(t)) - f(\tilde{N})$.

**Исследование на устойчивость по первому приближению.** Пусть $x_i(t) \equiv 0$ $(i = \overline{1,n})$ – решение системы (4). Чтобы исследовать его на устойчивость, надо выделить из функций $F_i(x)$ линейную часть вблизи точки $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, например, по формуле Тейлора. В результате будет построена система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x=0} x_j + \psi_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

которую при выполнении некоторых условий относительно функций в правой части системы (4) можно изучить с помощью следующей теоремы.

**Теорема Ляпунова.** *Рассмотрим систему*

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \psi_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

*где $a_{i,j}$ – постоянные, а $\psi_i$ – бесконечно малые выше первого порядка, точнее, при $|x| < \epsilon_0$*

$$|\psi_i(x)| \leqslant \gamma(x)|x|, \ i = \overline{1,n}, \quad \gamma(x) \to 0 \text{ при } |x| \to 0,$$

*где $|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$.*

*Тогда если все собственные значения матрицы $(a_{ij})$, $i, j = \overline{1,n}$, имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы асимптотически устойчиво, если же хоть одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение неустойчиво.*

Систему вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x=0} x_j, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

по отношению к системе (4) будем называть соответствующей *линеаризованной.*

При исследовании динамических систем большой интерес представляют стационарные решения, которым в фазовом пространстве соответствуют положения равновесия. Система (1) имеет стационарные решения $N(t) = N^* = (N_1^*, ..., N_n^*) = const$, если существуют решения системы уравнений

$$f_i(N) = 0, \ i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Для исследования на устойчивость найденных положений равновесия можно применить метод линеаризации, построив соответствующую линеаризованную систему в окрестности положения равновесия $N^*$:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(N)}{\partial N_j}\bigg|_{N=N^*} \xi_j, \quad i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

где $\xi_i = N_i - N_i^*$, $i = \overline{1,n}$ – отклонение от положения равновесия. В случае когда функции $f_i(N)$ непрерывно дифференцируемы, условия теоремы Ляпунова относительно функций в правой части системы выполнены и, следовательно, устойчивость положения равновесия определяется знаком вещественных частей собственных чисел матрицы системы (9).

О понятиях фазового пространства и фазовой плоскости, о классификации точек покоя (положений равновесия) и приемах построения фазового портрета автономной системы (1) см. следующие работы: [4, гл. 4], [5, гл. 5], [6, гл. 4], [2, гл. 6], [3, гл. 2], [7].

## Литература


1. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. М.: Наука, 1976. 496 с.

2. Боярчук А. К. Справочное пособие по высшей математике. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2003. 384 с.

3. Краснов М. Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. М., 2003. 176 с.

4. Понтрягин Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л. С. Понтрягин. М., 2004. 208 с.

5. Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. В. Васильева, А. Г. Свешников. М.: Наука, 1998. 232 с.

6. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. М., 2000. 320 с.

7. Эрроусмит Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс. М.: Мир, 1986. 243 с.