Лекция 5
Наблюдаемость линейных систем

Известно, что управление системой может выполняться по программе или по принципу обратной связи. Для практической реализации управления по принципу обратной связи необходимо знать состояние системы в каждый конкретный момент времени. Однако обычно оказывается, что не все фазовые координаты системы доступны измерению. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о возможности полного описания поведения фазовых координат системы по результатам неполного наблюдения.

§1. Наблюдаемость линейных нестационарных систем

Пусть управляемая система описывается уравнением:

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u, \ \ 0 < t < T, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ и $B(t)$ – непрерывные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times r$ соответственно. Пусть для системы (1) множество допустимых управлений состоит из векторных функций $u(t)$, принадлежащих пространству $L_2^r(0,T)$, T – произвольное, но фиксированное число.

Обозначим через $y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ – вектор, компоненты которого являются линейными комбинациями фазовых координат x_i, $i = \overline{1,n}$, и компонент управления u_j, $j = \overline{1,r}$, т. е. будем считать, что

$$y = C(t)x + D(t)u, \tag{2}$$

где $C(t)$ и $D(t)$ – непрерывные матрицы размерности $m \times n$ и $m \times r$ соответственно.

Будем предполагать, что управление $u = u(t)$ задано и компоненты y_i вектора y доступны наблюдению на $[0,T]$ и, следовательно, по результатам наблюдения известны функции $y_i = y_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, $t \in [0,T]$.

Основная задача наблюдения в этом случае состоит в том, что по полученным результатам наблюдения (т. е. известны функции

$y(t)$) определить значения функции $x(t)$ при всех $t \in [0, T]$, являющейся решением уравнения (1) при $u = u(t)$.

Это решение можно представить в виде:

$$x(t) = K(t,0)x^0 + \int\limits_0^t K(t,s)B(s)u(s)\,ds, \tag{3}$$

где x^0 – неизвестное начальное состояние.

Так как $K(t,s), B(t)$ и $u(t)$ считаются известными, то второе слагаемое в (3) оказывается известной функцией t. Неизвестным является слагаемое $K(t,0)x^0$.

Можно показать, что для решения вопросов наблюдаемости достаточно рассмотреть уравнения (1) и (2) при $u = 0$. Действительно, сделаем замену

$$x(t) = z(t) + \int_0^t K(t,s)B(s)u(s)\,ds. \tag{$*$}$$

Подставив ее в (1), получим

$$\dot z(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} B(s)u(s)\,ds + K(t,t)B(t)u(t) =$$

$$= A(t)z(t) + A(t)\int\limits_0^t K(t,s)B(s)u(s)\,ds + B(t)u.$$

Так как $\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial t} = A(t)K(t,s)$ и $K(t,t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t) = E$, где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений уравнения $\dot x = A(t)x$, то будем иметь

$$\dot z + A(t)\int\limits_0^t K(t,s)B(s)u(s)\,ds + B(t)u =$$

$$= A(t)z + A(t)\int\limits_0^t K(t,s)B(s)u(s)\,ds + B(t)u.$$

Таким образом, получили

$$\dot{z} = A(t)z.$$

Подставив $(*)$ в (2), получим

$$y = C(t)\big(z(t) + \int\limits_0^t K(t,s)B(s)u(s)\,ds\big) + D(t)u.$$

Отсюда, введя обозначение $Y(t)$:

$$Y(t) = y(t) - D(t)u - C(t)\int\limits_0^t K(t,s)B(s)u(s)\,ds,$$

получим уравнение

$$Y(t) = C(t)z(t).$$

Таким образом, основную задачу наблюдения для линейной системы можно сформулировать следующим образом.

По данным наблюдения известна вектор-функция $y(t),\ t \in [0,T]$. *Известно также, что она представима в виде*

$$y(t) = C(t)x(t), \tag{4}$$

где $C(t)$ *– заданная непрерывная матрица размерности* $m \times n$. *Требуется найти вектор* x^0 *начального состояния фазового вектора* $x(t)$, *определяемого уравнением:*

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{5}$$

Определение 1. *Если любое начальное состояние* x^0 *системы (5) можно определить по известной на* $[0,T]$ *функции* $y(t)$, *представимой в виде (4), то система (4), (5) называется* **вполне наблюдаемой** *на этом отрезке времени.*

Пусть $h_i(t)$ – i-й столбец матрицы $C(t)K(t,0)$. Размерность вектора $h_i(t)$, очевидно, равна m, а количество этих векторов равно n.

Теорема 1. *Для того чтобы система (4), (5) была вполне наблюдаемой на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant T$, *необходимо и достаточно, чтобы* *вектор-функции* $h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)$ *были линейно независимы на этом отрезке.*

Доказательство. **Достаточность.** Пусть вектор-функции $h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)$ линейно независимыми на отрезке $[0, T]$. Решение уравнения (5) можно представить в виде

$$x(t) = K(t, 0)x^0. \tag{6}$$

Тогда для вектора наблюдаемых величин (4) будем иметь

$$y(t) = C(t)K(t, 0)x^0.$$

Обе части этого равенства умножим слева на матрицу $K^*(t, 0)C^*(t)$ и полученный результат проинтегрируем на отрезке $[0, T]$. Будем иметь

$$z(T) = M(T)x^0,$$

где

$$z(T) = \int_0^T K^*(t, 0)C^*(t)y(t)\, dt,$$
$$M(T) = \int_0^T K^*(t, 0)C^*(t)C(t)K(t, 0)\, dt.$$

Матрица $M(T)$ – матрица Грама системы линейно независимых векторов $h_i(t),\ i = \overline{1, n}$, и ее определитель отличен от нуля. Следовательно, $x^0 = M^{-1}(T)z(T)$. Тем самым по известной функции $y(t),\ t \in [0, T]$, найдено начальное состояние системы. А по формуле (6) теперь можно определить решение системы (5).

Необходимость. Пусть система (4), (5) вполне наблюдаема на $[0, T]$, т. е. начальное состояние может быть определено по известной на $[0, T]$ функции $y(t)$. Докажем, что вектор-функции $h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)$ линейно независимы.

Предположим противное. Пусть $h_i(t),\ i = \overline{1, n}$, линейно зависимы на $[0, T]$. Тогда матрица $M(T)$ является вырожденной и существует **ненулевой** вектор $\alpha \in R^n$ такой, что скалярное произведение векторов α и $M(T)\alpha$ равен 0:

$$(\alpha, M(T)\alpha) = 0$$

(т. к. существует ненулевой вектор, который является решением уравнения $M(T)\alpha = 0$). Возьмем начальное состояние системы (5) $x(0) = x^0 = \alpha$. Ему соответствует вектор-функция $y(t)$:

$$y(t) = C(t)K(t,0)\alpha.$$

Тогда будем иметь

$$\int\limits_0^T y^*(t)y(t)\,dt = \int\limits_0^T \alpha^* K^*(t,0)C^*(t)C(t)K(t,0)\alpha\,dt = (\alpha, M(T)\alpha) = 0.$$

Следовательно, $y(t) \equiv 0,\ t \in [0,T]$. Однако у вполне наблюдаемой системы при $x(t) \neq 0$ наблюдаемая вектор-функция $y(t)$ не может быть тождественно равной нулю. Полученное противоречие доказывает, что вектор-функции $h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)$ являются линейно независимыми на отрезке $[0,T]$. $\square$

§2. Наблюдаемость линейных стационарных систем

Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x} = Ax, \tag{7}$$

$$y = Cx, \tag{8}$$

где A и C – постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $m \times n$ соответственно.

Попытаемся найти условия полной наблюдаемости этой системы на произвольном заданном отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant T$, выраженные непосредственно через матрицы A и C.

Любое решение уравнения (7) можно представить в виде

$$x(t) = e^{At}x^0, \tag{9}$$

где x^0 –начальное значение фазового вектора системы в момент времени $t = 0$. Так как для матричной экспоненты имеем

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k,$$

то из (8) и (9) получим

$$y(t) = C \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \cdot x^0.$$

Умножая полученное соотношение на $\alpha_i(t)$ и интегрируя полученный результат в пределах от 0 до T, будем иметь

$$\int\limits_0^T \alpha_i(t) y_j(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int\limits_0^T \alpha_i(t)\alpha_k(t)\,dt \right) C_j A^k x^0,$$
$$i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{1, m}, \tag{10}$$

где $y_j(t)$ – j-я компонента вектора $y(t)$, а C_j – j-я строка матрицы C, т. е. $C_j = (C_{j1}, C_{j2}, ..., C_{jn})$.

Введя обозначение для скалярного произведения функций $a(t)$ и $b(t)$:

$$(a, b) = \int\limits_0^T a(t) b(t)\,dt,$$

равенство (10) можно записать в виде

$$\begin{cases} (\alpha_0, \alpha_0) C_j x^0 + (\alpha_0, \alpha_1) C_j A x^0 + ... + (\alpha_0, \alpha_{n-1}) C_j A^{n-1} x^0 = (\alpha_0, y_j), \\ (\alpha_1, \alpha_0) C_j x^0 + (\alpha_1, \alpha_1) C_j A x^0 + ... + (\alpha_1, \alpha_{n-1}) C_j A^{n-1} x^0 = (\alpha_1, y_j), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\alpha_{n-1}, \alpha_0) C_j x^0 + (\alpha_{n-1}, \alpha_1) C_j A x^0 + ... + (\alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}) C_j A^{n-1} x^0 = \\ \qquad = (\alpha_{n-1}, y_j), \\ j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{11}$$

Определитель матрицы системы из коэффициентов (α_i, α_k) при $C_j A^k x^0$ отличен от нуля, так как является определителем Грама линейно независимых функций $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$. Следовательно, система (11) имеет единственное решение:

$$C_j x^0 = \gamma_j^1,\ \ C_j A x^0 = \gamma_j^2,\ \ ...\ ,\ \ C_j A^{n-1} x^0 = \gamma_j^{n-1}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Полученный набор условий может быть записан в матричной форме:

$$Nx^0 = \gamma,$$

где матрица N составлена из строк матриц $C, CA, CA^2, ..., CA^{n-1}$:

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA, \\ ... \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

а γ – вектор-столбец $\{\gamma_1^0, ..., \gamma_1^{n-1}, ..., \gamma_m^0, ..., \gamma_m^{n-1}\}$. Количество строк в матрице N и элементов в столбце γ равно mn.

Теорема 2. *Для того чтобы система (7), (8) была вполне наблюдаемой на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (12) был равен n.*

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

2. Егоров А. И. Основы теории управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 504 с.

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 560 с.

4. Жабко А. П., Прасолов А. В., Харитонов В. Л. Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений. – М.: Высш. школа, 2003. – 286 с.

5. Мороз А. И. Курс теории систем. – М.: Высш. школа, 1987. – 304.

6. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 384 с.

7. Заика Ю. В. Дифференциальные уравнения. Курс лекций. – Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2012. – 215 с.