Задачи и упражнения по теме:

Динамические системы с непрерывным временем на плоскости

1. Линейные динамические системы

1. Построить параметрический портреты и соответствующие фазовые портреты следующих динамических систем ($x, y \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$):

$$1)\ \begin{cases} x'(t) = 2ax + y, \\ y'(t) = -2ax + ay; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x'(t) = ax + y, \\ y'(t) = ay - (2a+1)x; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x'(t) = x + (2-a)y, \\ y'(t) = ax - 3y. \end{cases}$$

2. Построить параметрические портреты следующих динамических систем ($x, y \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$):

$$1)\ \begin{cases} x'(t) = \alpha x + y, \\ y'(t) = x + \beta y; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x'(t) = \alpha x + \beta y, \\ y'(t) = \gamma x + \delta y. \end{cases}$$

3. (Система линейных химических реакций.) Вещество X поступает извне с постоянной скоростью, превращается в вещество Y и со скорость, пропорциональной концентрации вещества Y выводится из сферы реакции. Все реакции имеют первый порядок, за исключением притока вещества извне, имеющего нулевой порядок. Схема реакции имеет вид:

$$\xrightarrow{k_1} X \xrightarrow{k_2} Y \xrightarrow{k_3}$$

и описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x, \\ \frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y. \end{cases}$$

Установите качественные свойства решений системы.

2. Нелинейные динамические системы

4. Рассматривается модель «хищник-жертва», описываемая системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-\mu)(4-x) - 2xy, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + xy, \end{cases}$$

в которой μ – положительный параметр. Найдите положения равновесия системы с неотрицательными координатами и исследуйте их на устойчивость в зависимости от параметра μ. Возможны ли бифуркации положений равновесия?

5. Исследуйте на устойчивость положения равновесия следующих систем:

1) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x \cdot \sqrt{x^2+y^2}, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \cdot \sqrt{x^2+y^2}; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x - x \cdot \sqrt{x^2+y^2}, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - y \cdot \sqrt{x^2+y^2}; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y + x(1-\sqrt{x^2+y^2})(2-\sqrt{x^2+y^2}), \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y(1-\sqrt{x^2+y^2})(2-\sqrt{x^2+y^2}); \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x(1-\sqrt{x^2+y^2})^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - y(1-\sqrt{x^2+y^2})^2; \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin\frac{\pi}{x^2+y^2}, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin\frac{\pi}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

6. Исследуйте поведение фазовых траекторий при различных значениях параметра $\alpha \in R$:

1) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y; \end{cases}$$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$

7. (*Модель брюсселятора.*) **Брюсселятор** — базовая модель, являющаяся классическим примером автоколебательного поведения переменных (концентраций) в системе химических реакций. Брюсселятор представляет собой следующую схему гипотетических реакций:

$$A \overset{k_1}{\rightleftarrows}_{k_{-1}} X, \quad 2X + Y \overset{k_2}{\rightleftarrows}_{k_{-2}} 3X, \quad B + X \overset{k_3}{\rightleftarrows}_{k_{-3}} Y + C, \quad X \overset{k_4}{\rightleftarrows}_{k_{-4}} R.$$

Здесь A, B – исходные вещества, C, R – продукты, X, Y – промежуточные вещества. Пусть конечные продукты C и R немедленно удаляются из реакционного пространства. Это означает, что обратные константы $k_{-3} = k_{-4} = 0$. Если субстрат A находится в избытке, то $k_{-1} = 0$. Будем предполагать также, что $k_{-2} = 0$. Значения остальных констант считаем равными 1. Тогда рассматриваемая схема реакций описывается системой уравнений с двумя параметрами A и B:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A - (B+1)x + x^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = x(B - xy), \\ A, B > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Найдите состояния равновесия системы с неотрицательными координатами, их типы в зависимости от параметров A и B. Выясните, при каких значениях параметров A и B в системе (1) возможны бифуркации состояний равновесия и бифуркация Андронова-Хопфа.