Задачи и упражнения к теме:

Динамические системы
с непрерывным временем на прямой

1. На рис. 1 дан график правой части уравнения (1). Сколько положений равновесия имеет уравнение и каков характер их устойчивости? Постройте фазовый портрет и интегральные кривые уравнения (1), соответствующие указанным начальным значениям (точки A, B и C на рис. 1)

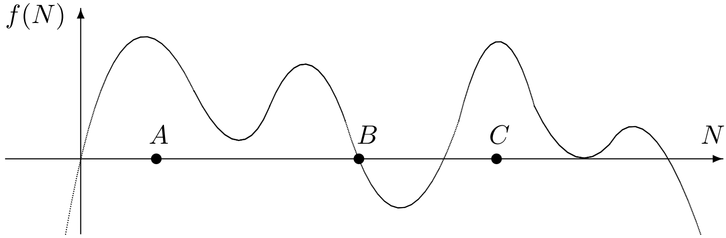

Рис. 1

2. Найдите положения равновесия следующих автономных уравнений ($D = \mathbb{R}$):

а) $u'(t) = u + 1$; б) $u'(t) = u - u^3$; в) $u'(t) = u^4 - u^3 - 2u^2$;

г) $u'(t) = u^2 + 1$; д) $u'(t) = \operatorname{sh}(u^2)$.

Определите их тип (аттрактор, репеллер, шунт). Постройте фазовый портрет для каждого уравнения.

3. Постройте бифуркационную диаграмму и типичные фазовые портреты для уравнения

$$u'(t) = (u - \lambda)(u^2 - \lambda), \quad u \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Постройте бифуркационную диаграмму и типичные фазовые портреты для динамической системы

$$\frac{du}{dt} = \alpha u + 2u^3 - u^5, \quad u \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

5. Постройте бифуркационную диаграмму для динамической системы

$$\frac{du}{dt} = u \cdot (6 - \lambda u) \cdot (\lambda + 2u - u^2) \cdot \big((\lambda - 10)^2 + (u - 5)^2 - 1\big) \cdot (\lambda^2 - u),$$

если $u, \lambda \in \mathbb{R}$.

6. Постройте параметрический портрет уравнения

$$u'(t) = u^3 + au - b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

7. Математическую модель лекарственного воздействия на зараженные вирусом клетки можно представить в виде

$$m'(t) = rm\left(1 - \frac{m}{k}\right) - \gamma m f(h), \quad m(0) = m_0.$$

Здесь m – количество зараженных клеток, $f(h)$ – функция терапии, зависящая от параметра h, характеризующего эффективность лекарственного воздействия, r, k, γ – положительные константы.

1) Подходящей заменой переменных приведите систему к безразмерному виду.

2) Исследуйте динамику системы при различных значениях параметра h в случае, когда $f(h) = h$.

8. Выполните анализ модели динамики численности популяции, которая учитывает два фактора – нижнюю критическую границу численности и самоограничение (самолимитирование) при больших численностях:

$$N'(t) = \frac{\alpha\beta N^2}{\beta + \tau N} - \gamma N - \delta N^2, \qquad \alpha, \beta, \tau, \gamma, \delta - const > 0.$$

Можно ли уменьшить размерность области параметров?

9. Выполните анализ модели,которая отписывает динамику популяции насекомых (канадского почкоеда):

$$N'(t) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2},$$

где r – линейная скорость роста (мальтусовский коэффициент прироста), K – емкость среды, определяемая плотностью лиственного покрова на деревьях. Выражение $\frac{BN^2}{A^2 + N^2}$ описывает истребление насекомых хищниками (A и B – положительные константы).

10. Какие типы бифуркаций неподвижных точек характерны для следующих динамических систем:

а) $u'(t) = 1 + \alpha u + u^2, \quad u \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R};$

б) $u'(t) = \alpha + u - \ln(1+u), \quad u > -1,\ \alpha \in \mathbb{R};$

в) $u'(t) = u(\alpha - e^u), \quad u \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R};$

г) $u'(t) = u + \dfrac{\alpha u}{1+u^2}, \quad u \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R};$

д) $u'(t) = \alpha u - \sin u, \quad u \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R};$

Постройте для них бифуркационные диаграммы.

11. Модель популяции, в которой могут возникать эпидемии, можно построить следующим образом. Первоначально популяция развивается в соответствии с уравнением

$$\frac{dN}{dt} = (a - bN)N, \quad a,\ b - const > 0, \tag{1}$$

и ее численность растет до величины $Q < \frac{a}{b}$. Когда популяция достигает такого размера, в ней возникает эпидемия, и развитие популяции происходит согласно другому уравнению:

$$\frac{dN}{dt} = (A - B \cdot N)N, \quad A,\ B - const > 0, \tag{2}$$

причем $Q > \frac{A}{B}$. Численность популяции уменьшается до уровня q, где $\frac{A}{B} < q < \frac{a}{b}$; при достижении этого уровня эпидемия прекращается, рост популяции снова управляется уравнением (1) и т. д. Нарисуйте график функции $N = N(t)$, иллюстрирующий колебания численности популяции в зависимости от времени. Покажите, что время T, за которое популяция возрастает от q до Q, задается формулой

$$T_1 = \frac{1}{a} \ln \left[\frac{Q(a - bq)}{q(a - bQ)} \right].$$

Найдите время T_2, которое необходимо, чтобы численность популяции сократилась от Q до q под действием уравнения (2). Найдите период цикла изменения численности популяции.