7.12.15, 10.12.2015

Занятие № 20, 21. Дискретные динамические системы на прямой

Задача 1

Провести исследование динамики плотности популяции ($N_t \geq 0$), описываемой уравнением:

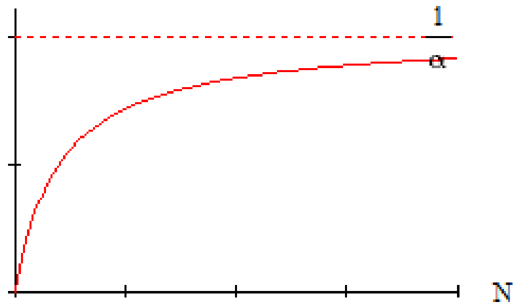
$$N_{t+1} = \frac{N_t}{\alpha N_t + \beta}, \quad \alpha, \beta - \ const > 0. \tag{1}$$

Существуют ли среди решений уравнения циклы длины 2?

Основные результаты

1. Свойства функции $F(N) = \dfrac{N}{\alpha N + \beta}$:

   1) $F(N) > 0 \quad \forall N > 0, \quad F(0) = 0;$
   2) $F'(N) = \dfrac{\beta}{(\alpha N + \beta)^2} > 0 \quad \forall N \geq 0,$ функция возрастает для $\forall N \geq 0$;
   3) $F(N) \to \dfrac{1}{\alpha} \quad при \quad N \to +\infty;$
   4) $F''(N) = -\dfrac{2\alpha\beta}{(\alpha N + \beta)^3} \leq 0 \quad \forall N \geq 0,$ функция выпукла вверх $\forall N \geq 0$.



2. Существование положений равновесия ($N^* \geq 0$)

Положения равновесия – неотрицательные корни уравнения $N = F(N)$.

$0 < \beta < 1$	$\beta \geq 1$
$N_1^* = 0, \quad N_2^* = \dfrac{1-\beta}{\alpha}$	$N_1^* = 0$

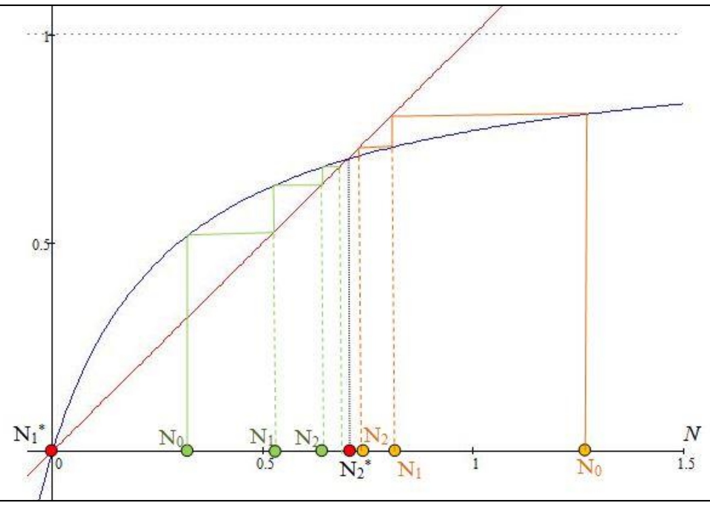
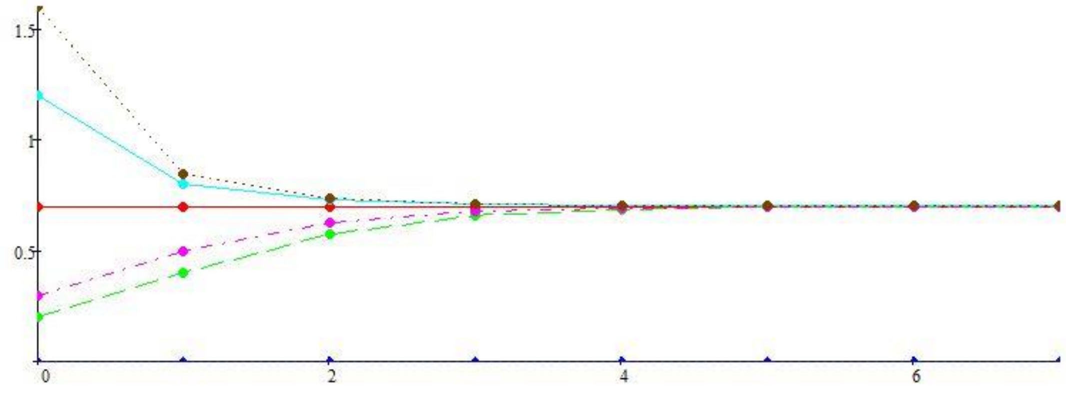
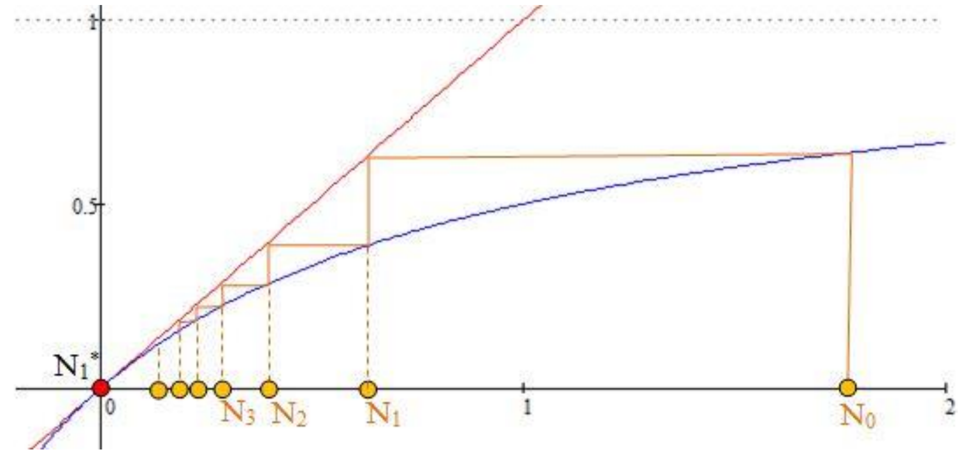
β = 1 - бифуркационное значение параметра β.
При непрерывном изменении параметра β, когда он достигает значения, равного 1, происходит качественная перестройка в системе – бифуркация, - изменяется количество точек покоя.

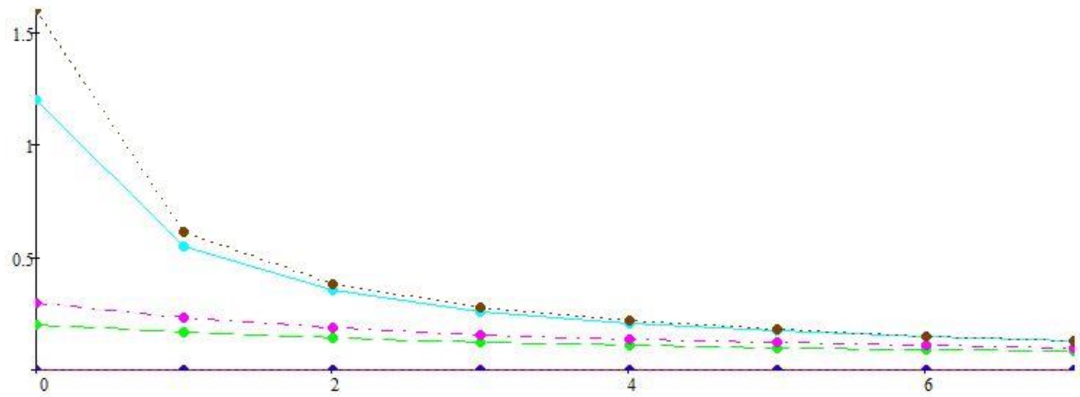
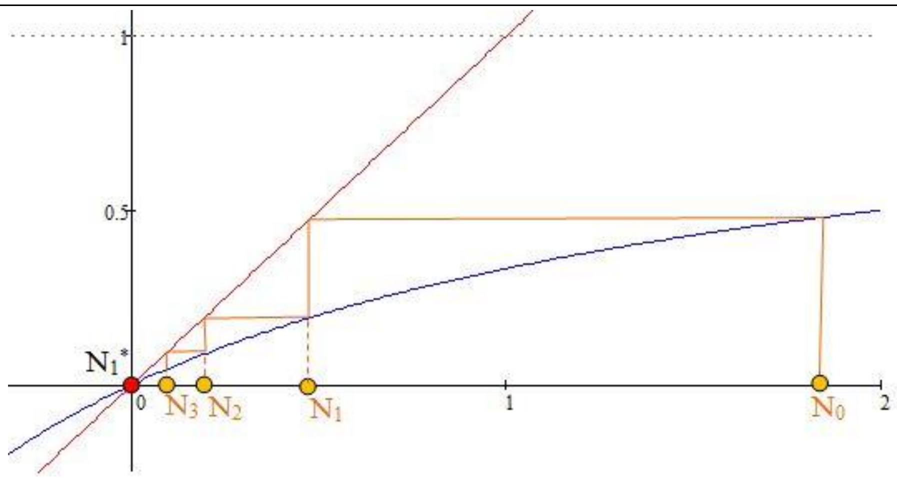
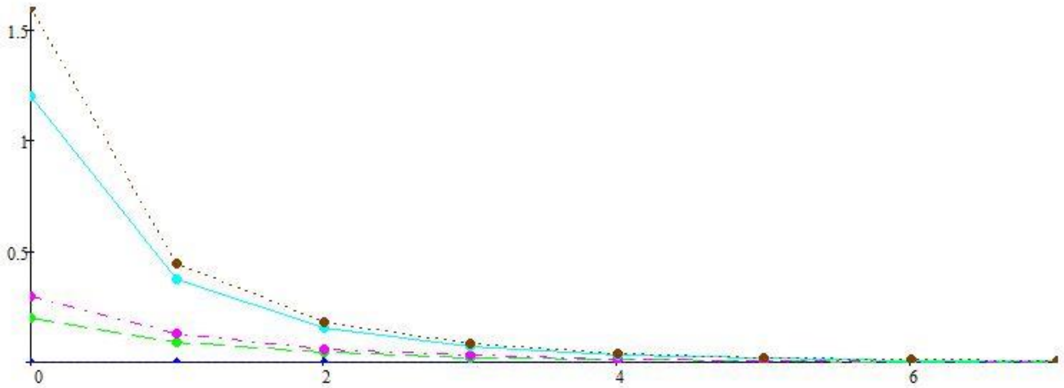
3. Устойчивость положений равновесия (используемые при анализе правила):

   1) проверка достаточного условия асимптотической устойчивости $0 < |F'(N^*)| < 1$:
      а) если $0 < |F(N^*)| < 1$, то N^* – асимптотически устойчиво,
      б) если $|F(N^*)| > 1$, то N^* – неустойчиво;
   2) если $F'(N^*) = 0$ и $F''(N^*) \neq 0$, то N^* – асимптотически устойчиво;
   3) когда $F'(N^*) = 1$, если $F''(N^*) < 0$ и N^* совпадает с левой границей множества допустимых значений переменной N, то N^* – асимптотически устойчиво;
   4) когда $F(N^*) = -1$, строится функция $S(N) = -2F'''(N) - 3(F''(N))^2$ (шварциан отображения F):
      а) если $S(N^*) < 0$, то N^* – асимптотически устойчиво,
      б) если $S(N^*) > 0$, то N^* – неустойчиво.

$0 < \beta < 1$	$\beta \geq 1$
$N_1^* = 0 -$ неустойчиво; $N_2^* = \dfrac{1-\beta}{\alpha}$ – асимптотически устойчиво	$N_1^* = 0$ - асимптотически устойчиво. При $\beta = 1$ положение равновесия $N_1^* = 0$ ас. уст-во, т. к. $F''(0) < 0$ и $N_t \geq 0$.

4. Графическая иллюстрация существования и устойчивости положений равновесия

Диаграмма Ламерея $0 < \beta < 1$	
Траектории (решение уравнения) Для различных начальных условий при $0 < \beta < 1$	 Стабилизация на равновесном уровне N_2^* при любом начальном условии $N_0 > 0$. Но нет глобальной устойчивости, так как существуют два положения равновесия.
Диаграмма Ламерея $\beta = 1$	 Если бы имели смысл начальные численности $N_0 < 0$, то положение равновесия не было бы устойчивым по Ляпунову. Однако, при этом имеет место полуустойчивость.

Траектории (решение уравнения) Для различных начальных условий при $\beta = 1$	 Глобальная устойчивость положения равновесия $N_1^* = 0$. Наблюдается вырождение популяции при любом начальном условии $N_0 > 0$.
Диаграмма Ламерея $\beta > 1$	
Траектории (решение уравнения) Для различных начальных условий при $\beta > 1$	 Глобальная устойчивость положения равновесия $N_1^* = 0$. Наблюдается вырождение популяции при любом начальном условии $N_0 > 0$.

5. Асимптотическое поведение решения

$0 < \beta < 1$	$\beta \geq 1$
При любом $N_0 \neq 0$ происходит стабилизация на равновесном уровне N_2^*	При любом N_0 происходит стабилизация на равновесном уровне N_1^*

6. Так как функция F(N) является возрастающей, то среди решений уравнения (1) нет циклов.

7. Построение решения задачи Коши для уравнения (1).
   1) Если $N_0 = 0$, то $N_t = 0 \;\; \forall\, t \geq 0$.

2) С помощью замены $N_t = \dfrac{1}{u_t}$ уравнение (1) приводится к виду:

$$u_{t+1} = \beta u_t + \alpha. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является линейным неоднородным с постоянными коэффициентами. Его общее решение есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения $u_{t+1} = \beta u_t$: $u_t = C\beta^t$, где C – произвольная const.

Частное решение можно найти по виду правой части.

А) если β ≠ 1, то частное решение ищем в виде $u_t^ч = D = const.$ Подстановка его в (2) дает:

$$D = \beta D + \alpha \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Б) если β = 1, то частное решение ищем в виде $u_t^ч = Dt.$ Подстановка его в (2) дает:

$$D(t+1) = Dt + \alpha \quad \Rightarrow \quad D = \alpha.$$

Таким образом, общее решение уравнения (2):

$$u_t = C\beta^t + u_t^ч, \quad u_t = \begin{cases} C\beta^t + \dfrac{\alpha}{1-\beta}, & \beta \neq 1, \\ C + \alpha t, & \beta = 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Используя начальное условие, найдем С:

$$u_0 = \frac{1}{N_0} = \begin{cases} C + \dfrac{\alpha}{1-\beta}, & \beta \neq 1, \\ C, & \beta = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C = \begin{cases} \dfrac{1}{N_0} - \dfrac{\alpha}{1-\beta}, & \beta \neq 1, \\ \dfrac{1}{N_0}, & \beta = 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Возвращаясь к замене, найдем решение задачи Коши для уравнения (1):

$$N_t = \begin{cases} \dfrac{(1-\beta)N_0}{(1-\beta-\alpha N_0)\beta^t + \alpha N_0}, & \beta \neq 1, \\ \dfrac{N_0}{1+\alpha N_0 t}, & \beta = 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Заметим, что формула (5) дает нулевое решение, если $N_0 = 0$.

Если $N_0 > 0$, то

$$\lim_{t\to+\infty} N_t = \begin{cases} \dfrac{1-\beta}{\alpha}, & \beta < 1, \\ 0, & \beta \geq 1. \end{cases}$$

При β ≥ 1 имеет место глобальная асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия. При β < 1 ненулевое положение равновесия является притягивающим, если $N_0 > 0$.

Домашнее задание

Найти положения равновесия динамической системы и исследовать их на устойчивость

$$u_{n+1} = \lambda - u_n, \quad n = 0,1,\ldots, \quad u_n, \lambda \in R.$$

17.12.2015

Занятие № 22 Дискретные динамические системы на прямой (продолжение)

Задача 2

Исследовать качественное поведение решений динамической системы

$$u_{n+1} = \lambda - u_n^2, \quad n = 0,1,\ldots, \quad u_n, \lambda \in R. \tag{1}$$

1. Положения равновесия – вещественные корни уравнения

$$u = \lambda - u^2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + u - \lambda = 0. \tag{2}$$

Так как дискриминант квадратного уравнения D = 1 + 4λ ≥ 0, если λ ≥ –1/4, то уравнение (1):

1) не имеет положений равновесия, если λ < –1/4;

2) имеет одно положение равновесия $u_1^* = -\frac{1}{2}$, если λ = –1/4;

3) имеет два положений равновесия $u_1^* = \frac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}$, $u_2^* = \frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}$, если λ > –1/4, причем

   а) $u_1^* < u_2^* < 0$, если –1/4 < λ < 0,
   б) $u_1^* = -1 < u_2^* = 0$, если λ = 0,
   в) $u_1^* < 0 < u_2^*$, если λ > 0.

λ = –1/4 – бифуркационное значение параметра λ.

2. Устойчивость положений равновесия (локальный анализ)

$$f(u) = \lambda - u^2, \quad f'(u) = -2u, \quad f''(u) = -2, \quad f'''(u) = 0.$$

1) λ = –1/4, $u_1^* = -\frac{1}{2}$, $f'(u_1^*) = 1$, $f''(u_1^*) = -2$. Положение равновесия $u_1^* = -\frac{1}{2}$ является полуустойчивым.

2) λ > –1/4.

Так как $f'(u_1^*) = 1 + \sqrt{1+4\lambda} > 1$ для любых λ > –1/4, то положение равновесия u_1^* является неустойчивым (малые отклонения от положения равновесия монотонно нарастают).

Для положения равновесия u_2^* проверим достаточное условие асимптотической устойчивости $\left|f(u_1^*)\right| < 1$:

$$-1 < 1 - \sqrt{1+4\lambda} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < -\sqrt{1+4\lambda} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \sqrt{1+4\lambda} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1+4\lambda < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4}.$$

Если λ = 0, то $f'(u_2^*) = f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$, и, следовательно, положение равновесия является асимптотически устойчивым.

При λ = ¾ имеем $f'(u_2^*) = f'(1/2) = -1$, шварциан $S(1/2) = -2f'''(1/2) - 3\big(f''(1/2)\big)^2 = -12 < 0$. Следовательно, положение равновесия u_2^* асимптотически устойчиво, если $-\frac{1}{4} < \lambda \le \frac{3}{4}$.

Так как

$$0 < 1 - \sqrt{1+4\lambda} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < -\sqrt{1+4\lambda} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \sqrt{1+4\lambda} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1+4\lambda < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4} < \lambda < 0,$$

$$-1 < 1 - \sqrt{1+4\lambda} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < -\sqrt{1+4\lambda} < -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \sqrt{1+4\lambda} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 1+4\lambda < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \lambda < \frac{3}{4},$$

то при $-\frac{1}{4} < \lambda < 0$ малые отклонения от положения равновесия u_2^* монотонно затухают, а при $0 < \lambda < \frac{3}{4}$ имеют место затухающие колебания относительно u_2^*.

Так как при $\lambda > \frac{3}{4}$ имеем $f'(u_2^*) = 1 - \sqrt{1+4\lambda} < -1$, то положение равновесия является неустойчивым (нарастающие колебания).

<table>
<tr><th></th><th>λ < –1/4</th><th>λ = –1/4</th><th>–1/4 < λ ≤ 3/4</th><th>λ > 3/4</th></tr>
<tr><td>u_1*</td><td></td><td rowspan="2">u_1* = u_2* = –1/2 полуустойчиво</td><td colspan="2">Не устойчиво</td></tr>
<tr><td>u_2*</td><td></td><td>Асимптотически устойчиво</td><td>Не устойчиво</td></tr>
</table>

λ = 3/4 – бифуркационное значение параметра λ (положение равновесия теряет устойчивость).

3. Поиск циклов длины 2.

Точки u_1 и u_2, образующие цикл длины 2, являются решениями системы:

$$\begin{cases} u_1 = f(u_2), \\ u_2 = f(u_1), \\ u_1 \neq u_2 \end{cases}$$

u_1 и u_2 следует искать среди корней уравнения:

$$u = f(f(u)). \tag{3}$$

Для динамической системы (1) уравнение (2) принимает вид:

$$u = \lambda - \left(f(u)\right)^2 \iff u = \lambda - \left(\lambda - u^2\right)^2 \iff u^4 - 2\lambda u^2 + u + \lambda(\lambda - 1) = 0. \tag{4}$$

Положения равновесия u_1* и u_2* являются корнями уравнения (2). Следовательно, по теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} u_1^* + u_2^* = -1, \\ u_1^* u_2^* = -\lambda. \end{cases} \tag{5}$$

Так как u_1* и u_2* являются корнями и уравнения (3), то, используя теорему Виета и (5), получим:

$$\begin{cases} u_1^* + u_2^* + u_1 + u_2 = 0, \\ u_1^* u_2^* u_1 u_2 = \lambda(\lambda - 1) \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 + u_2 = 1, \\ \lambda u_1 u_2 = \lambda(1 - \lambda). \end{cases}$$

При λ = 0 уравнение (4) примет вид $u^4 + u = 0$, корни которого 0 и –1 совпадают с положениями равновесия. Поэтому циклов длины 2 при λ = 0 нет.

При λ ≠ 0 u_1 и u_2 следует искать среди корней уравнения

$$u^2 - \left((u_1 + u_2)u\right) + u_1 u_2 = 0 \iff u^2 - u + 1 - \lambda = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет различные вещественные корни, если λ > 3/4:

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{4\lambda - 3}}{2}, \quad u_2 = \frac{1 + \sqrt{4\lambda - 3}}{2} \tag{7}$$

При λ > ¾ уравнение (1) имеет цикл длины 2. Точки u_1 и u_2 цикла определяются выражениями (7).

4. Устойчивость циклов длины 2.

Достаточное условие устойчивости цикла длины 2: $0 < \left| f'(u_1) f'(u_2) \right| < 1.$

$\mu(u_1, u_2) = f'(u_1) f'(u_2)$ – мультипликатор цикла длины 2.

Так как μ(u_1, u_2) = 4 u_1 u_2 = 4(1–λ), то

$$0 < \left|\mu(u_1, u_2)\right| < 1 \iff 0 < 4|1 - \lambda| < 1 \iff \begin{cases} 3/4 < \lambda < 1, \\ 1 < \lambda < 5/4. \end{cases}$$

Таким образом, если λ > 5/4, то цикл (u_1, u_2) является неустойчивым (отталкивающим).

Если $\mu = 0$ или $|\mu| = 1$, то устойчивость цикла определяется по правилам 2) – 4) исследования устойчивости положений равновесия (задача 1) u_1 и u_2 уравнения

$$u_{n+2} = f(f(u_n)),\ n = 0, 2, 4, \ldots$$

При $\lambda = 1$ мультипликатор $\mu = 0$, $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$.

Обозначим $F(u) = f(f(u))$. Имеем $F'(u_1) = F'(u_2) = \mu(u_1, u_2) = 0.$

Так как

$$F''(u) = \left(f'(f(u))f'(u)\right)' = f''(f(u))\left(f'(u)\right)^2 + f'(f(u))f''(u),$$

то для $f(u) = \lambda - u^2$ получим

$$F''(u) = -12u^2 + 4\lambda.$$

Тогда при $\lambda = 1$ будем иметь $F''(0) = 4 \neq 0$ и $F''(1) = 8 \neq 0$. Таким образом, из устойчивости точек u_1 и u_2 следует устойчивость цикла (u_1, u_2).

При $\lambda = 5/4$ мультипликатор $\mu = -1$, $u_1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, $u_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Имеем $F'(u_1) = F'(u_2) = \mu(u_1, u_2) = -1$. Шварциан для анализа точек u_1 и u_2:

$$S(u) = -2F'''(u) - 3\left(F''(u)\right)^2 = 48u - 3\left(5 - 12u^2\right)^2$$

Так как $u_1 < 0$, то $S(u_1) < 0$. Для u_2 имеем

$$S(u_2) = 24\left(1+\sqrt{2}\right) - 3\left(5 - 3(1+\sqrt{2})^2\right)^2 = -120\left(2+\sqrt{2}\right) < 0.$$

Таким образом, из устойчивости точек u_1 и u_2 следует устойчивость цикла (u_1, u_2).

При $3/4 < \lambda \leq 5/4$ цикл длины 2 является устойчивым. При $\lambda > 5/4$ цикл длины 2 является неустойчивым.

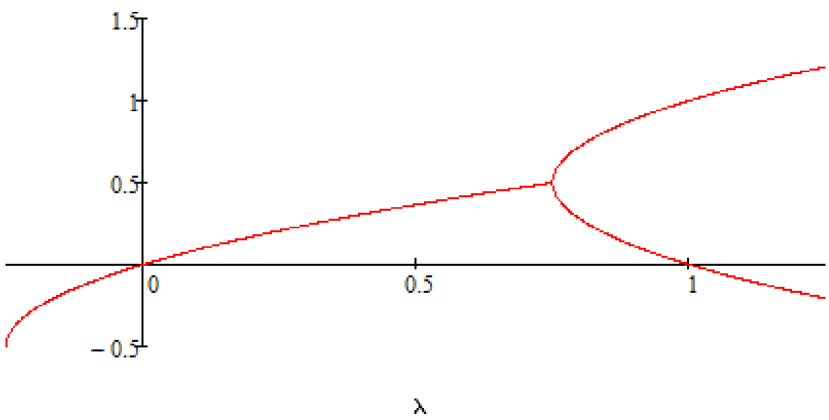
Домашнее задание

1. Покажите, что при всех $\lambda > \frac{3}{4}$ точки u_1 и u_2, определяемые по формулам (7), отличаются от равновесных u_1^* и u_2^*.
2. Установите области притяжения положения равновесия u_2^*.
3. Выполните численные эксперименты с моделью (1).

21.12.2015

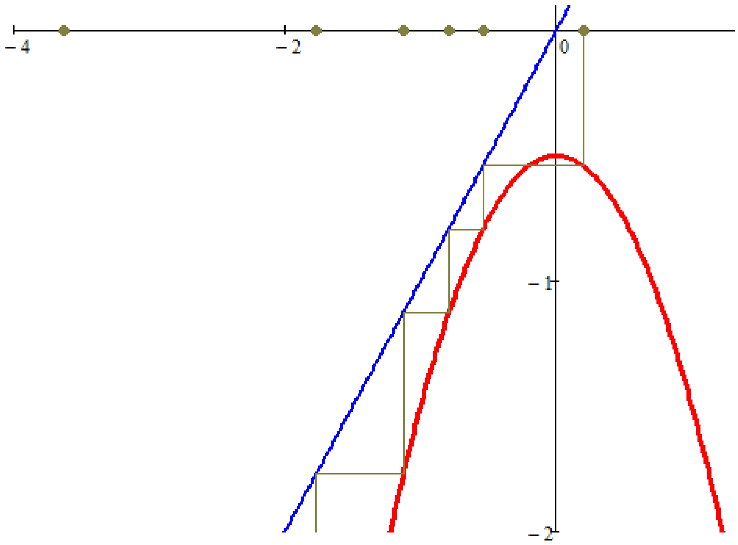
Занятие № 23 Дискретные динамические системы на прямой (продолжение)

5. Бифуркационная диаграмма уравнения (1) при изменении параметра λ от –1/4 до 5/4.

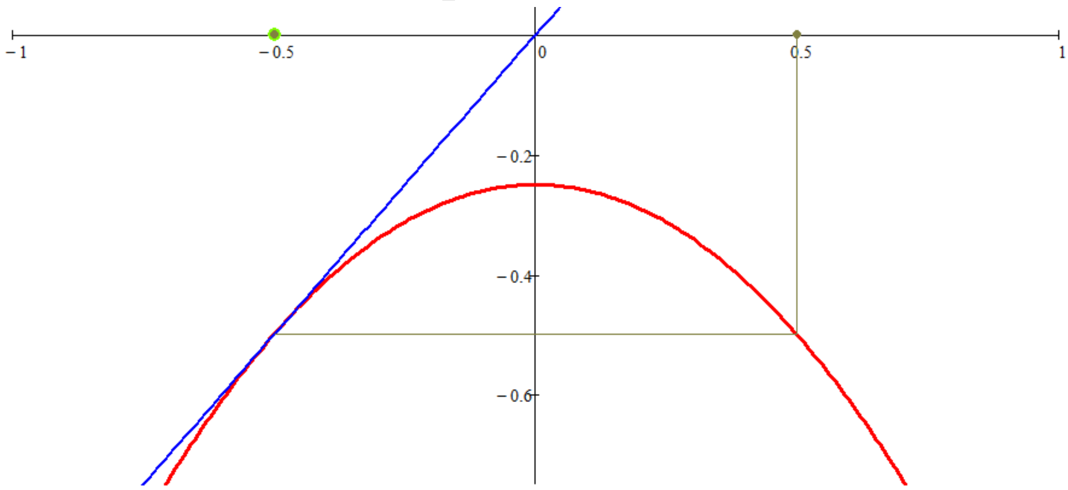


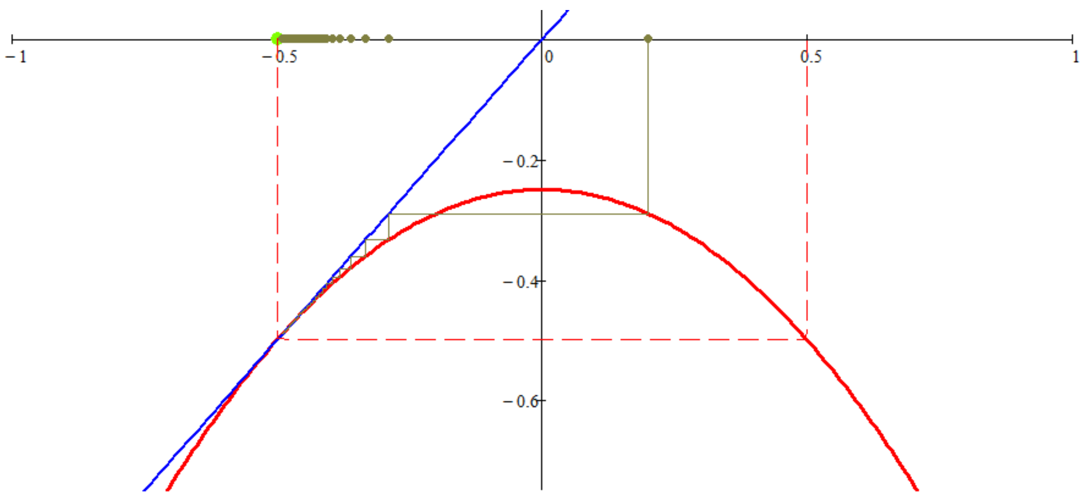
6. Графическая иллюстрация существования и устойчивости положений равновесия. Качественное поведение решений уравнения (1) при $\lambda \le 3/4$ и любых начальных условиях. Области притяжения положений равновесия.

1) Если $\lambda < -1/4$, при любом начальном условии $u_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$.

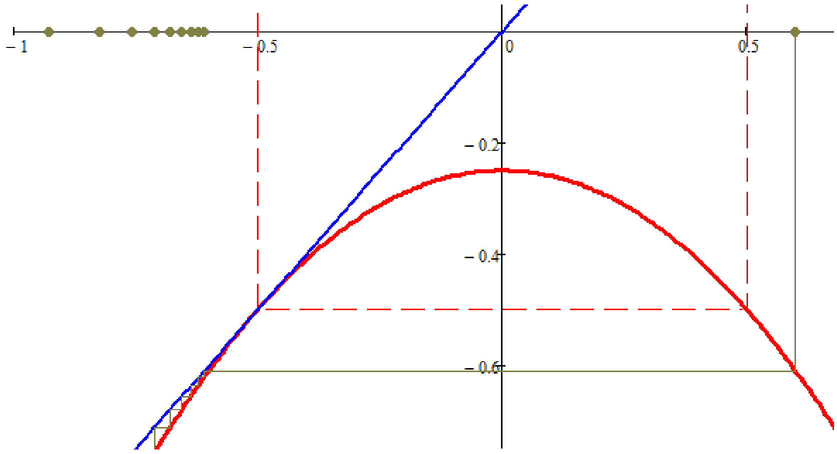


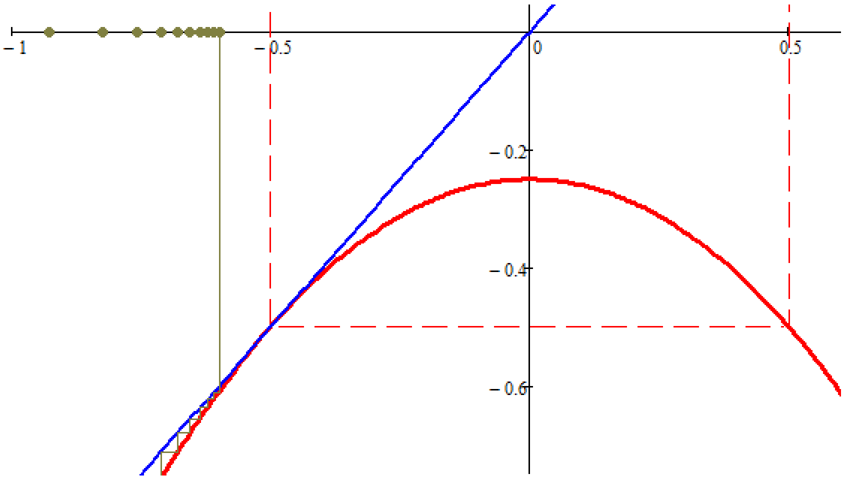
2) При $\lambda = -1/4$, положение равновесия $u_1^* = -\dfrac{1}{2}$ является притягивающим, если $u_0 \in$ [-1/2; 1/2].



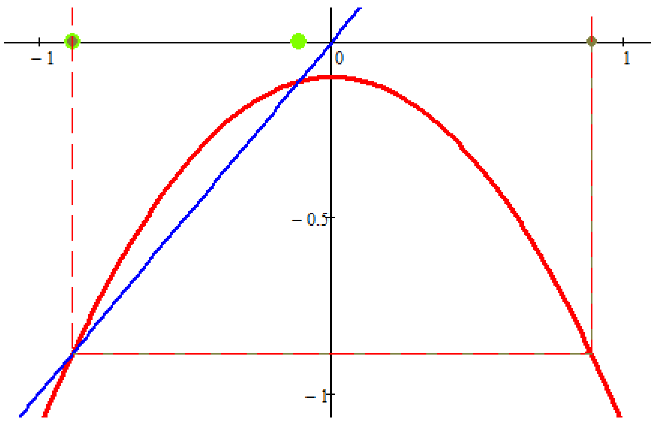


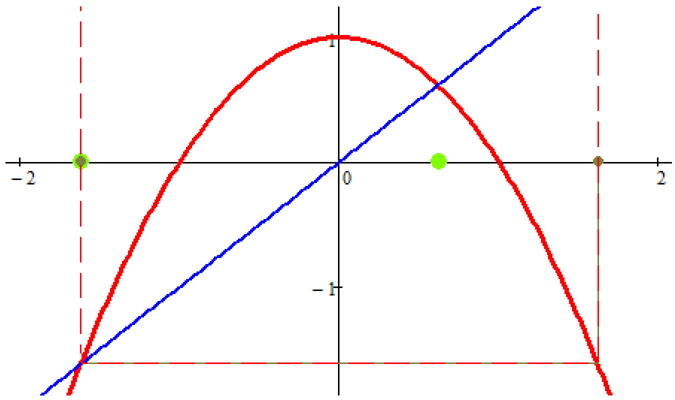
3) При $\lambda = -1/4$, если $|u_0| > ½$, то $u_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$.



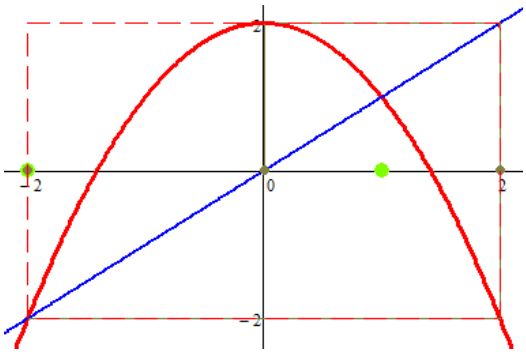


4) При $\lambda > -1/4$ положение равновесия u_1^* является притягивающим, если $u_0 = u_1^*$ или $u_0 = -u_1^*$.



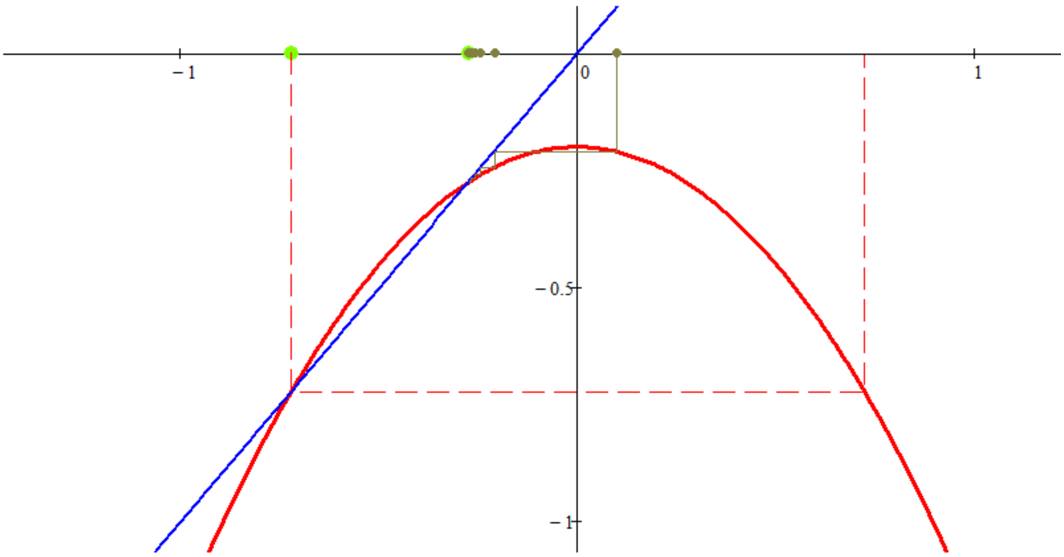


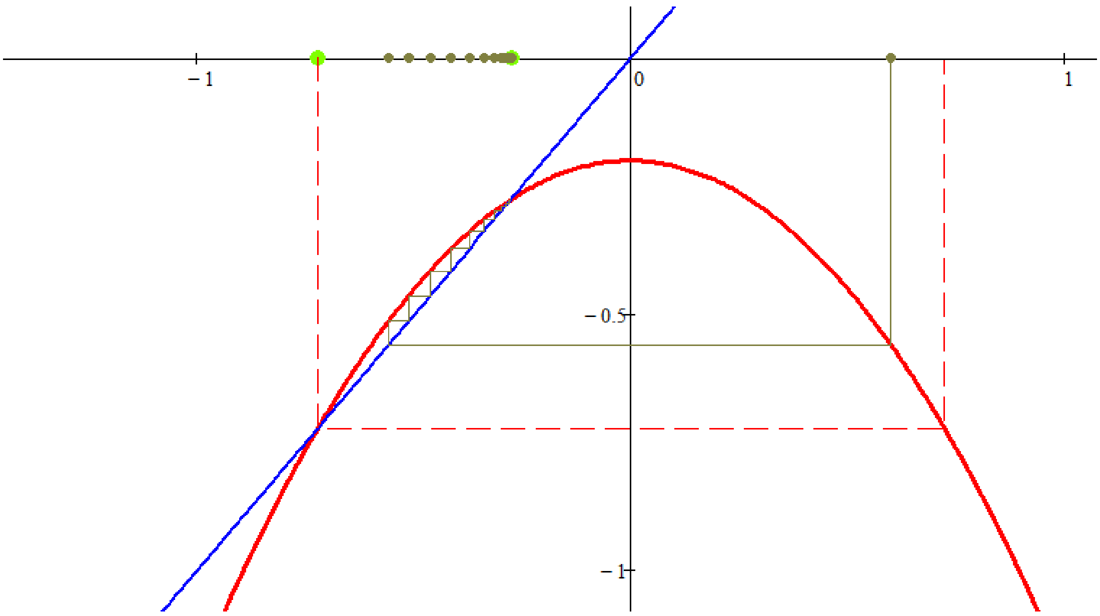
5) При $\lambda = 2$ положение равновесия $u_1^* = -2$ является притягивающим, если $u_0 \in \{-2; 0; 2\}$.



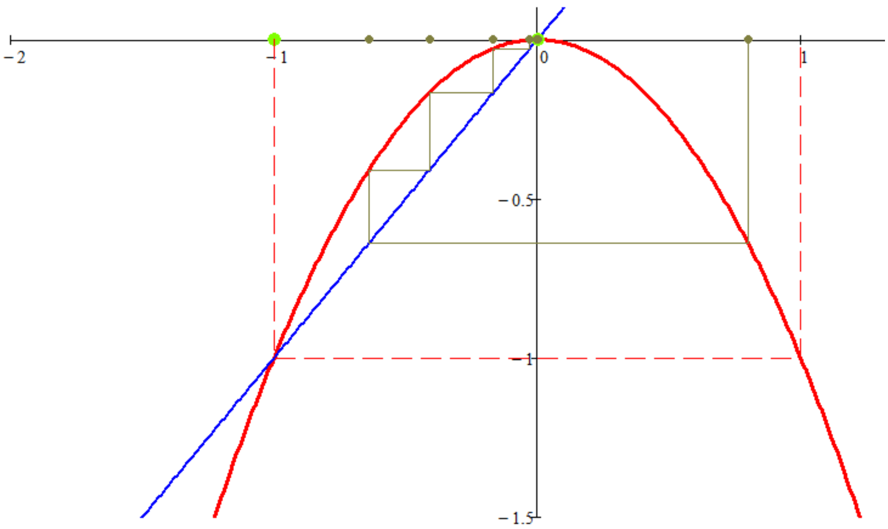
6) При $-1/4 < \lambda < 3/4$ положение равновесия u_2^* является притягивающим, если $u_0 \in (u_1^*; -u_1^*)$.

$\lambda = -0.2$

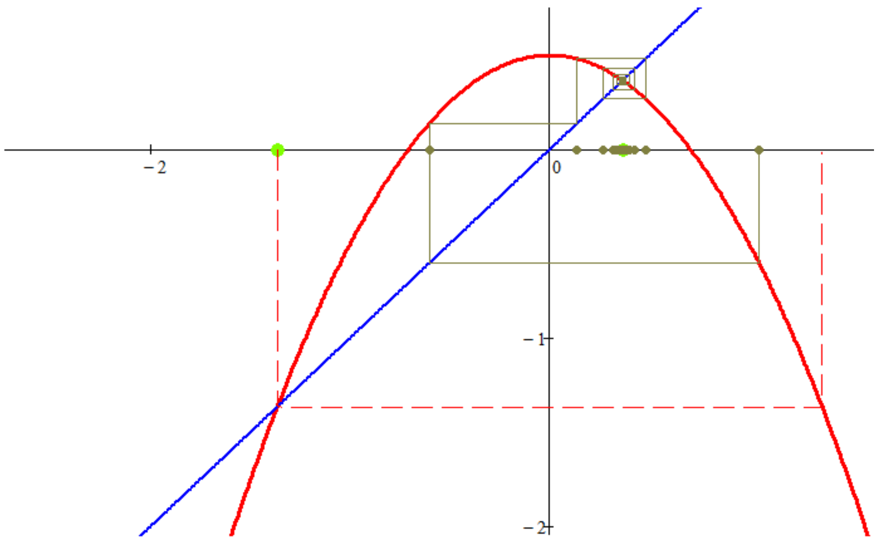




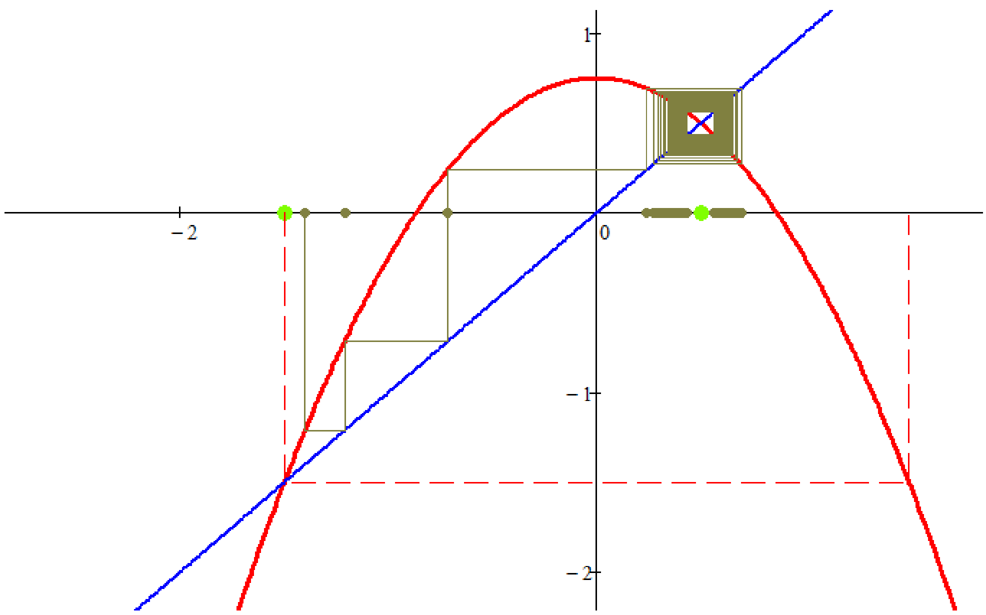
$\lambda = 0$



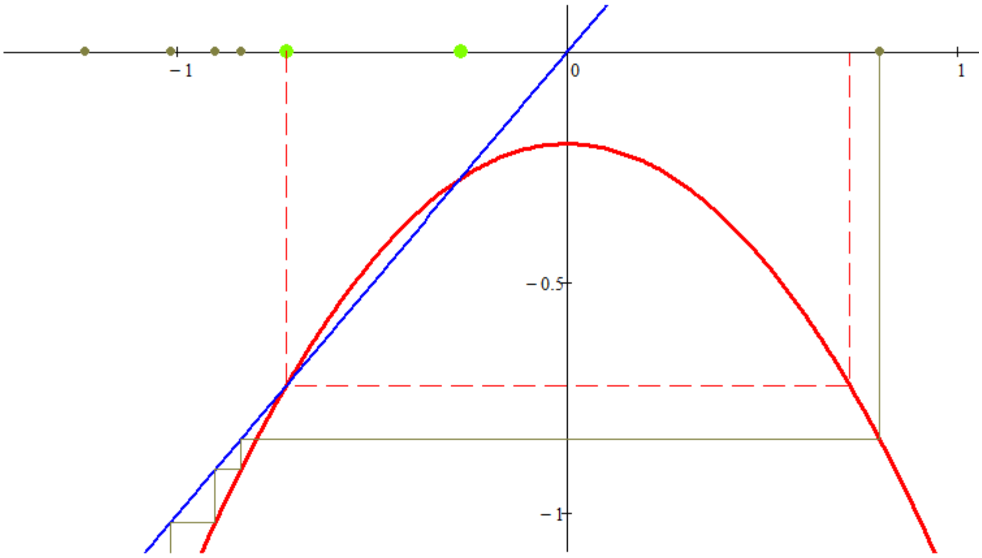
$\lambda = 0.5$

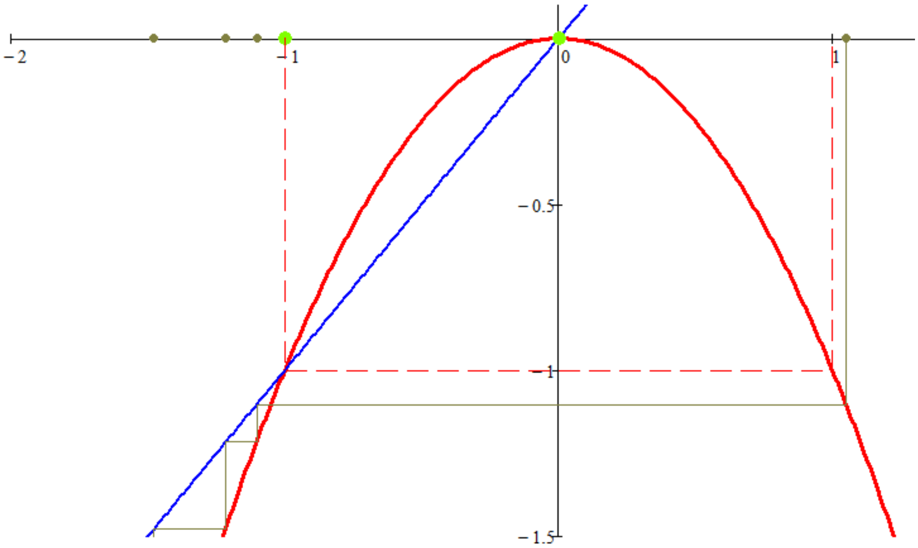


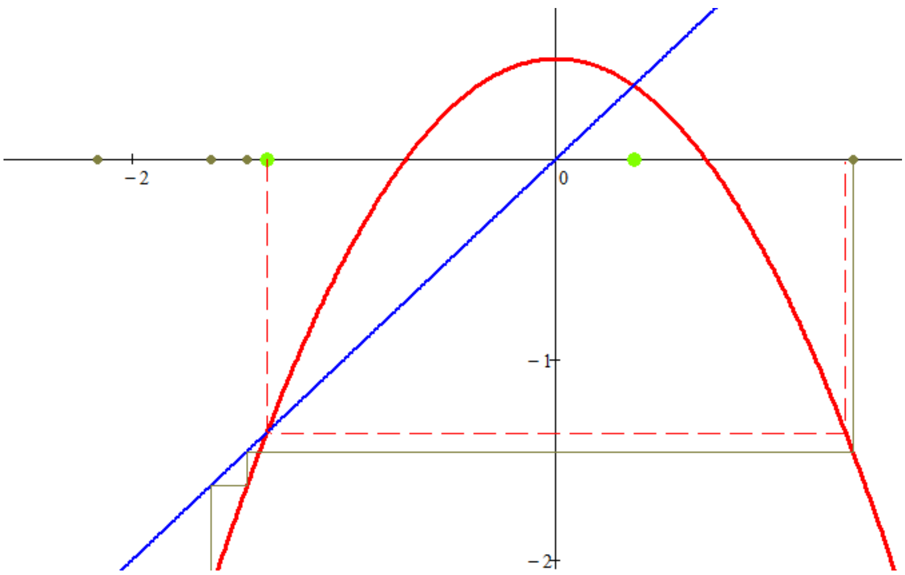
$\lambda = 0.75$



7. При $\lambda > -1/4$, если $|u_0| > |u_1^*|$, то $u_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$.

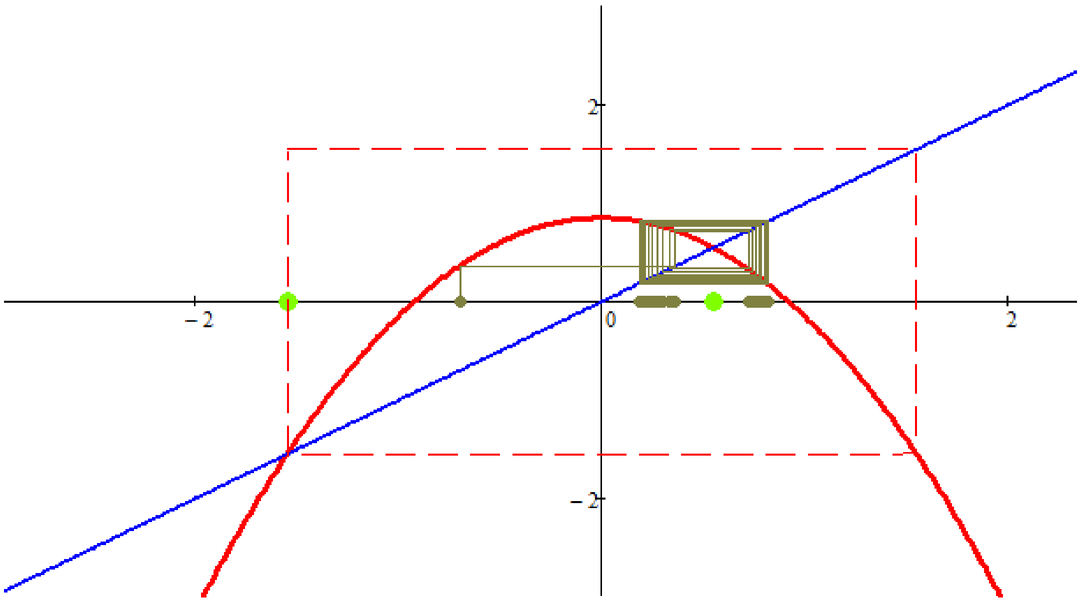




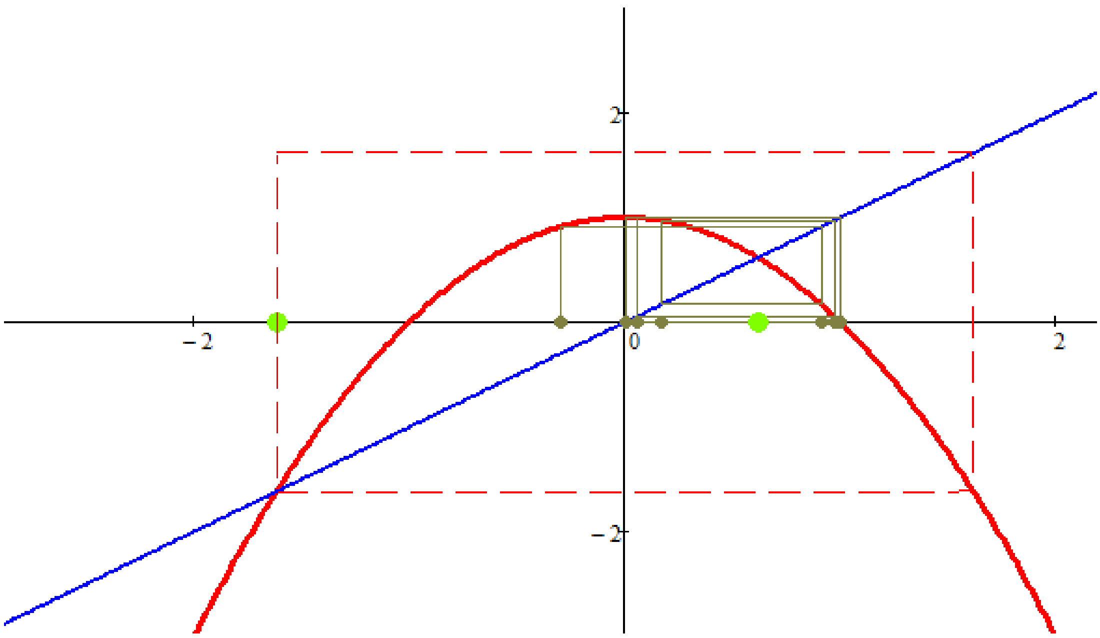


8. При $\lambda \in (3/4;\ 5/4]$, если $|u_0| < |u_1^*|$ и $u_0 \neq u_2^*$, аттрактором является цикл длины 2.

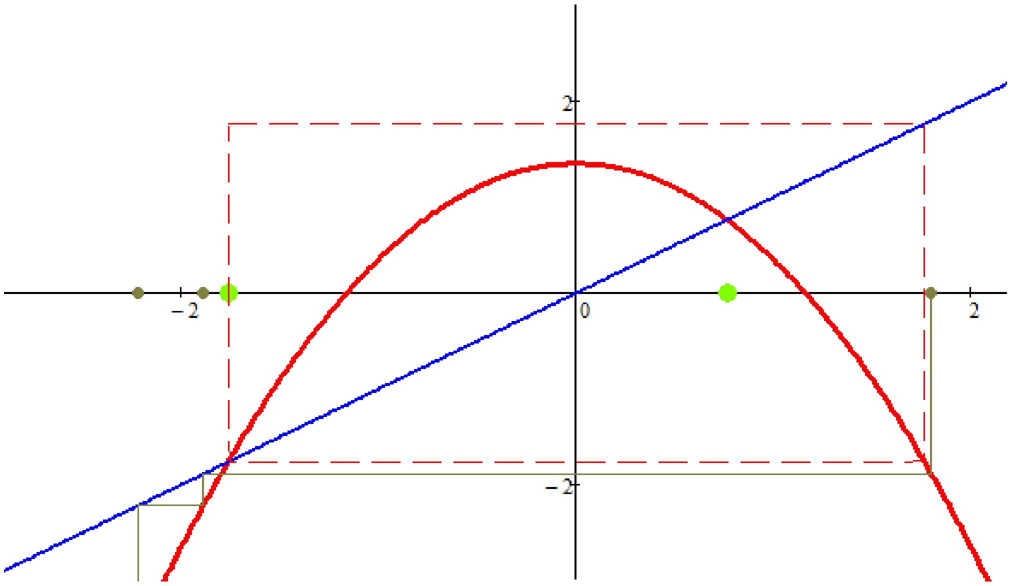
$\lambda = 0.85 \qquad u_0 = -0.7$



$\lambda = 1 \qquad u_0 = -0.3$



$\lambda = 1.35$ $\quad u_0 = 1.8$



9. Бифуркационная диаграмма