28.04.2017

Занятие № 9. Предельные циклы

На фазовой плоскости периодическим решениям автономной системы

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, y), \\ y'(t) = g(x, y) \end{cases} \qquad (1)$$

соответствуют замкнутые траектории – *циклы*. Замкнутая изолированная траектория называется *предельным циклом*. Такими решениями обычно описываются незатухающие периодические процессы. Это характерно только для нелинейных систем. Предельный цикл может быть устойчивым (аттрактор), неустойчивым (репеллер) и полуустойчивым.

*Предельный цикл называется **устойчивым**, если существует такая область на фазовой плоскости, содержащая этот предельный цикл, – окрестность ε, что все фазовые траектории, начинающиеся в окрестности ε, асимптотически при $t \to +\infty$ приближаются к предельному циклу.*

*Если же, наоборот, в сколь угодно малой окрестности ε предельного цикла существует по крайней мере одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при $t \to +\infty$, то такой цикл называется **неустойчивым**.*

Для нахождения предельных циклов не существует таких простых аналитических методов, как для нахождения положений равновесия (стационарных точек) и исследования их устойчивости. Однако, исследование фазовой плоскости системы позволяет ответить на вопрос, есть в данной системе предельный цикл или нет.

Некоторые критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий (в том числе предельных циклов):

1. Если в системе не существует особых точек, то в ней не может быть замкнутых траекторий.
2. Если в системе существует одна особая точка, отличная от узла, фокуса и центра (например, седло), то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.
3. Если в системе имеются только простые особые точки, причем через все точки типа узел и фокус проходят интегральные кривые, уходящие на бесконечность, то в такой системе нет замкнутых фазовых траекторий.
4. **Критерий Бендиксона**. Если в некоторой односвязной области $U \subseteq R^2$ выражение $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$ не меняет знака, то в этой области система (1) не может иметь предельных циклов.

Сформулируем несколько теорем[1], определяющих наличие предельного цикла по топологическому строению фазовой плоскости.

Теорема 1. *Пусть на фазовой плоскости существует область[2], из которой фазовые траектории не выходят и в которой нет положений равновесия. Тогда в этой области обязательно существует предельный цикл, причем остальные траектории обязательно наматываются на него.*

Теорема 2. *Если существует на фазовой плоскости некоторая замкнутая область, такая, что все фазовые траектории, пересекающие границу этой области, входят в нее, и внутри этой области находится неустойчивая точка покоя, то в этой области обязательно имеется хотя бы один предельный цикл.*

№ 1. Исследовать на устойчивость положения равновесия следующей системы (x, $y \in$ R):

$$\begin{cases} x'(t) = -y - x\cdot\sqrt{x^2+y^2}, \\ y'(t) = x - y\cdot\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Система имеет единственное нулевое положение равновесия P(0, 0). В окрестности точки P соответствующая линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} x'(t) = -y, \\ y'(t) = x. \end{cases}$$

Так как собственные значения матрицы системы являются чисто мнимыми $\lambda = \pm i$, то точка P является либо центром, либо фокусом. Но так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -3\sqrt{x^2+y^2} < 0 \quad \forall (x,y) \in R^2 \setminus (0,0),$$

то, по критерию Бендиксона, система (2) не имеет замкнутых траекторий. Следовательно, положение равновесия P является фокусом.

Сложив первое равнение системы (2), умноженное на x, со вторым, умноженным на y, получим

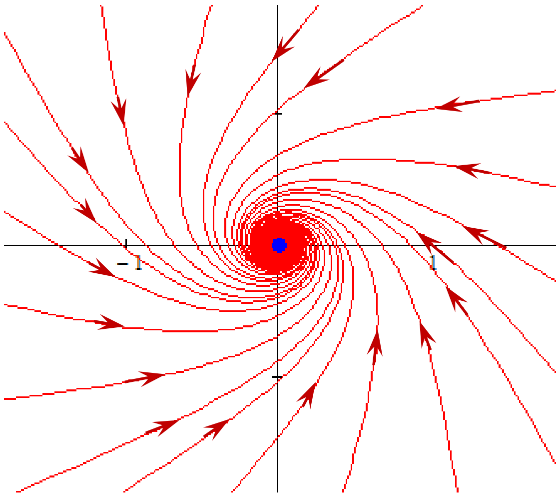
$$\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = -(x^2+y^2)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{t+C}.$$

---

[1] Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. С. 127.

[2] Такая область не может быть односвязной.

Так как $r(t)=\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{t+r(0)}\to 0$ при $t\to+\infty$, то движение по фазовой траектории направлено к началу координат. Следовательно, положение равновесия P(0, 0) является устойчивым фокусом. А так как $y'(t)\big|_{y=0}=x>0\ \forall x>0$, то спирали закручиваются против часовой стрелки.



Для доказательства существования предельного цикла часто используется переход к полярным координатам:

$$\begin{cases} x(t)=r(t)\cos\varphi(t), \\ y'(t)=r(t)\sin\varphi(t). \end{cases}$$

№ 2. Исследовать на устойчивость положения равновесия следующей системы (*x*, *y*∈R):

$$\begin{cases} x'(t)=-y+x-x\cdot\sqrt{x^2+y^2}, \\ y'(t)=x+y-y\cdot\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Выяснить, имеет ли система предельный цикл.

Решение. При переходе к полярным координатам получим систему:

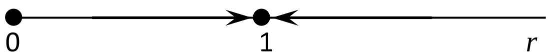
$$\begin{cases} r'(t)=r(1-r), \\ \varphi'(t)=1. \end{cases}$$

Уравнение $r'(t)=r(1-r)$ имеет два положения равновесия:

$$r_1=0, \quad r_2=1.$$

Первому соответствует положение равновесия P(0,0) системы (3). Второму – замкнутая траектория (окружность радиуса 1 с центром в начале координат), т.е. предельный цикл системы (3).

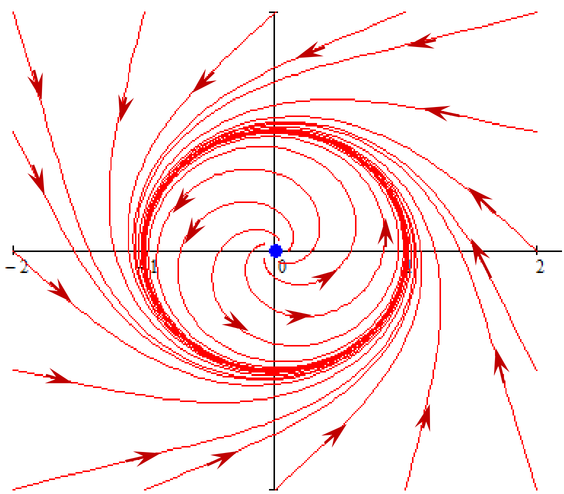
Построив фазовый портрет уравнения $r'(t) = r(1-r)$:



можно сделать вывод:

1) Система (3) имеет неустойчивое положение равновесия P(0,0), которое является фокусом.
2) Система (3) имеет устойчивый предельный цикл.

Так как $y'(t)\big|_{y=0} = x > 0\ \ \forall x > 0,$ то траектории накручиваются на предельный цикл против часовой стрелки (Движение по фазовым траекториям против часовой стрелки, так как $\varphi'(t) = 1 > 0$.)



№ 3. Исследовать на устойчивость положения равновесия следующей системы (*x*, *y*∈R):

$$\begin{cases} x'(t) = -y - x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ y'(t) = x - y\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{4}$$

Решение. При переходе к полярным координатам получим систему:

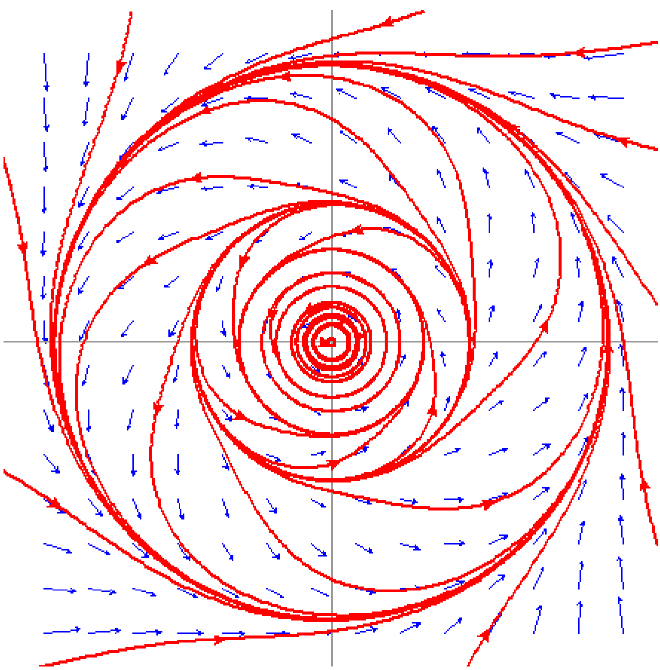
$$\begin{cases} r'(t) = -r^2 \cdot \sin\dfrac{\pi}{r}, \\ \varphi'(t) = 1. \end{cases}$$

Так как

$$f(r) = -r^2 \cdot \sin\frac{\pi}{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} r = 0, \\ r = \dfrac{1}{n},\ n \in N, \end{array}\right.$$

то система (4) имеет одно положение равновесия P(0,0) и бесконечное счетное множество предельных циклов, которые являются окружностями с центрами в начале координат и радиусами $r_n = 1/n$ $(1/n \to 0$ при $n \to +\infty)$. Пусть n определяет номер цикла.

Так как функция $f(r)$ при прохождении через точку r_n меняет свой знак и $f(r) < 0$, если $r > 1$, то предельные циклы с нечетными номерами являются устойчивыми, а с четными – неустойчивыми. Фазовые траектории накручиваются на нечетные циклы, и раскручиваются с четных предельных циклов. Так как $\varphi'(t) = 1 > 0$, то движение по всем фазовым траекториям происходит против часовой стрелки. Точка P(0,0) является **центро-фокусом**.



Бифуркации положений равновесия

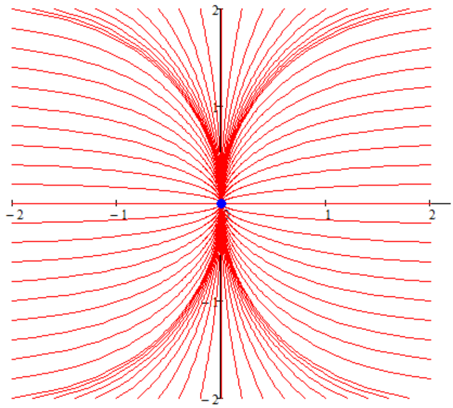
Бифуркация типа «вилка»

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - x^3, \\ y'(t) = -y, \end{cases} \qquad x, y, \alpha \in R.$$

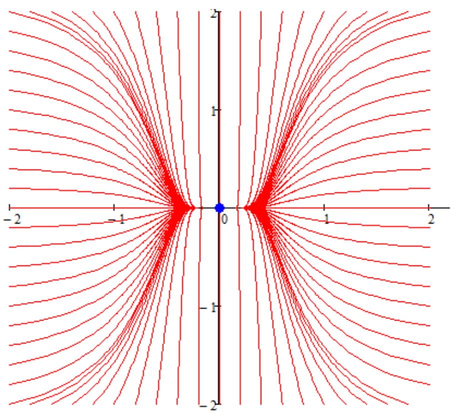
Система имеет:

1) одно положение равновесия P(0; 0), которое является устойчивым узлом, если $\alpha \le 0$;
2) три положения равновесия $(0;0),\ (-\sqrt{\alpha},0),\ (\sqrt{\alpha},0),$ если $\alpha > 0$. Первое является седлом, два других – устойчивыми узлами.

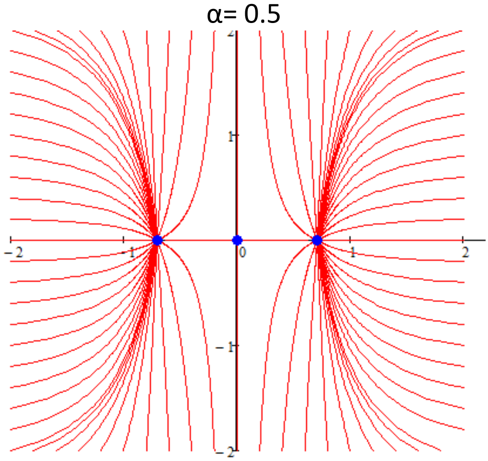
$\alpha = -2$



$\alpha = 0$



$\alpha = 0.5$



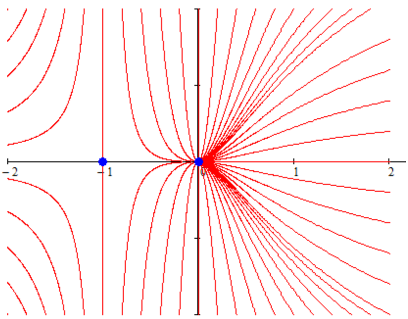
Бифуркация «обмен устойчивостью»

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - x^2, \\ y'(t) = -y, \end{cases} \qquad x, y, \alpha \in R.$$

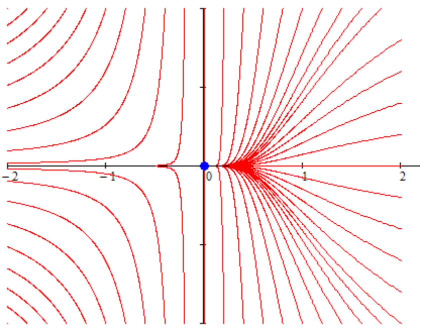
Система имеет:

1) одно положение равновесия P(0; 0), которое является седло-узлом, если $\alpha = 0$;
2) два положения равновесия (0; 0) и $(\alpha, 0)$, если $\alpha \neq 0$. Первое является седлом, второе – устойчивым узлом.

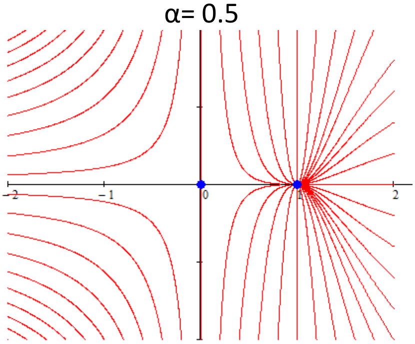
$\alpha = -1$



$\alpha = 0$



$\alpha = 0.5$

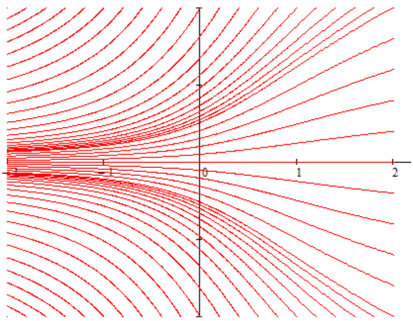


Бифуркация типа «седло-узел»

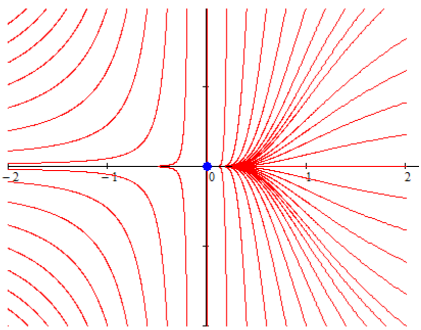
$$\begin{cases} x'(t) = \alpha - x^2, \\ y'(t) = -y, \end{cases} \qquad x, y, \alpha \in R.$$

Система не имеет положений равновесия, если α < 0.
Система имеет **одно** положение равновесия P(0; 0), которое является седло-узлом, если α = 0.
Система имеет **два** положения равновесия $(-\sqrt{\alpha}, 0)$, $(\sqrt{\alpha}, 0)$, если α > 0. Первое является седлом, второе – устойчивым узлом.

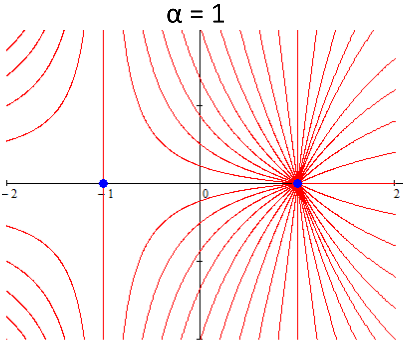
α = –2



α = 0



α = 1



Бифуркация рождения цикла (бифуркация Андронова-Хопфа)

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - y - x\left(x^2 + y^2\right), \\ y'(t) = x + \alpha y - y\left(x^2 + y^2\right), \end{cases} \qquad x, y, \alpha \in R.$$

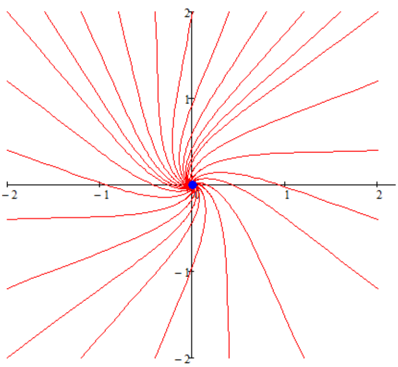
В полярных координатах система имеет вид:

$$\begin{cases} r'(t) = r(\alpha - r^2), \\ \varphi'(t) = 1. \end{cases}$$

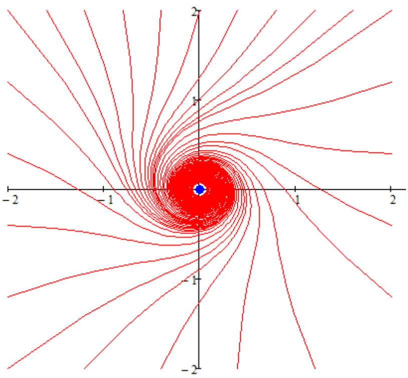
Система имеет **одно** положение равновесия P(0; 0), которое является устойчивым фокусом, если $\alpha \leq 0$.

Система имеет **одно** положение равновесия P(0; 0), которое является неустойчивым фокусом, и устойчивый предельный цикл, если $\alpha > 0$.

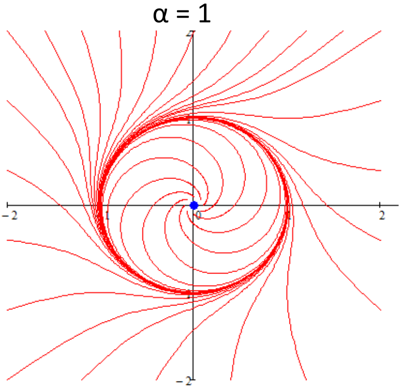
α = –2



α = 0



α = 1



Домашнее задание

Исследуйте на устойчивость положения равновесия следующих систем (x, y$\in$R). Выясните, имеют ли они предельные циклы и каков характер их устойчивости.

1. $$\begin{cases} x'(t) = 2y + x\cdot\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right), \\ y'(t) = -2x + y\cdot\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right). \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x'(t) = -y - x\cdot\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2, \\ y'(t) = x - y\cdot\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2. \end{cases}$$