Устойчивость положений равновесия автономных систем (метод линеаризации Ляпунова, теорема Ляпунова)

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, y), \\ y'(t) = g(x, y), \end{cases} \qquad f, g \in C^2(D).$$

Поиск положений равновесия $P(x^*, y^*)$**:**

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Исследование на устойчивость по первому приближению[1] (первый метод Ляпунова):

Положение равновесия $P(x^*, y^*)$ асимптотически устойчиво, если все собственные значения матрицы линеаризованной системы имеют отрицательную вещественную часть. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $P(x^*, y^*)$ неустойчиво.

Матрица линеаризованной системы

$$A = \begin{pmatrix} f'_x(x^*, y^*) & f'_y(x^*, y^*) \\ g'_x(x^*, y^*) & g'_y(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0\,.$$

Условия асимптотической устойчивости положения равновесия

$$\operatorname{tr} A > 0, \quad \det A > 0.$$

Тип особой точки $P(x^*, y^*)$

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i \neq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$
узел	**седло**	**фокус**	**Центр или фокус (нужны дополнительные исследования)**

[1] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

$D \geq 0$ и $\det A > 0$	$\det A < 0$	$D < 0$ и $\mathrm{tr} A \neq 0$	$\det A > 0$ и $\mathrm{tr} A = 0$

Дискриминант характеристического уравнения: $D = (\mathrm{tr} A)^2 - 4 \cdot \det A$.

№ 1. Качественный анализ модели «хищник-жертва» (модель Лотки-Вольтерры[2])

Модель Лотки-Вольтерры описывает взаимодействие двух видов, один из которых является хищником, а другой – жертвой (например, экологическая система караси-щуки или рыси-зайцы) и имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= (\varepsilon_1 - \alpha_1 N_2) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= (-\varepsilon_2 + \alpha_2 N_1) N_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

$N_1(t)$ - численность жертвы в момент времени t,
$N_1(t)$ - численность хищника в момент времени t,
ε_1 - коэффициент прироста жертвы в отсутствии хищника,
$-\varepsilon_2$ - коэффициент прироста жертвы в отсутствии жертвы,
α_1 - коэффициент истребления хищником жертв,
α_2 - коэффициент переработки съеденной биомассы жертвы в биомассу хищника,
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha_1, \alpha_2$ – положительные постоянные.

Основные предположения, положенные в основу системы (1) характеризуются следующими гипотезами: в отсутствии хищников жертвы размножаются неограниченно ($\dot{N}_1 = \varepsilon_1 N_1$); хищники в отсутствии жертв вымирают ($\dot{N}_2 = -\varepsilon_2 N_2$); слагаемые, пропорциональные члену $N_1 N_2$, рассматриваются как превращение энергии (биомассы) одного источника в энергию (биомассу) другого (эффект влияния популяции хищников на популяцию

[2] Модель исторически возникла в связи с попыткой объяснить колебания улова рыбы в Адриатическом море (1931 г.) (*В. Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование*. М.: Наука, 1976). Та же система дифференциальных уравнений была предложена Лоткой несколько ранее (1924 г.), но Вольтерра значительно более полно провел анализ этой системы.

жертв заключается в уменьшении относительной скорости прироста численности жертв на величину, пропорциональную численности хищников).

Фазовым пространством системы (1) является множество

$$\mathrm{R}_+^2 = \{(N_1, N_2) : N_1 \ge 0, N_2 \ge 0\}.$$

1. Положения равновесия

$$\begin{cases} (\varepsilon_1 - \alpha_1 N_2) N_1 = 0, \\ (-\varepsilon_2 + \alpha_2 N_1) N_2 = 0 \end{cases}$$

Вывод 1. Система (1) имеет два положения равновесия $P_0(0,0)$ и $P_1\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\alpha_2}, \dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_1}\right)$ при любых допустимых значениях параметров.

2. Исследование на устойчивость положений равновесия

В окрестности положения равновесия $P(N_1^*, N_2^*)$ соответствующая линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\varepsilon_1 - \alpha_1 N_2^*) x - \alpha_1 N_1^* y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha_2 N_2^* x + (-\varepsilon_2 + \alpha_2 N_1^*) y, \end{cases} \qquad (2)$$

где $x(t) = N_1(t) - N_1^*$, $y(t) = N_2(t) - N_2^*$.

В окрестности точки P_0 имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\varepsilon_2 y. \end{cases}$$

Так как собственные значения матрицы системы:

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 > 0, \quad \lambda_2 = -\varepsilon_2 < 0,$$

то положение равновесия P_0 **неустойчиво** и является **седлом**.

В окрестности точки P_1 линеаризованная система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\alpha_1 \varepsilon_2}{\alpha_2} y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\alpha_2 \varepsilon_1}{\alpha_1} y. \end{cases}$$

Так как собственные значения матрицы системы являются комплексными с нулевой вещественной частью:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\, i,$$

то характер устойчивости не может быть установлен с помощью первого метода Ляпунова.

Решив уравнение

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{(-\varepsilon_2 + \alpha_2 N_1) N_2}{(\varepsilon_1 - \alpha_1 N_2) N_1},$$

найдем первый интеграл системы (1):

$$\varepsilon_1 \ln N_2 - \alpha_1 N_2 + \varepsilon_2 \ln N_1 - \alpha_2 N_1 = C, \quad C - const.$$

Уравнение определяет семейство фазовых траекторий системы (1), которые соответствуют ненулевым начальным условиям:

$$N_1(0) \neq 0, \quad N_2(0) \neq 0.$$

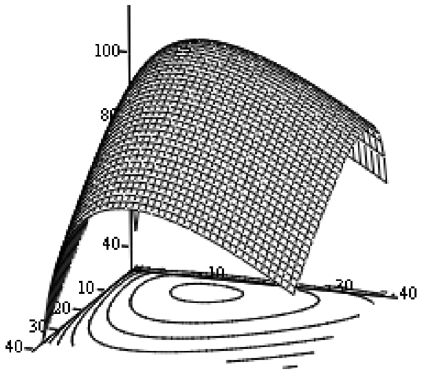
Домашнее задание

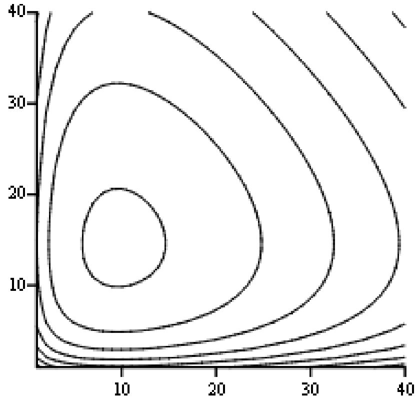
Исследовать функцию

$$F(N_1, N_2) = \varepsilon_1 \ln N_2 - \alpha_1 N_2 + \varepsilon_2 \ln N_1 - \alpha_2 N_1$$

Показать, что линии уровня поверхности $z = F(N_1, N_2)$ являются замкнутыми.

График поверхности и линии уровня поверхности $F(N_1, N_2)$



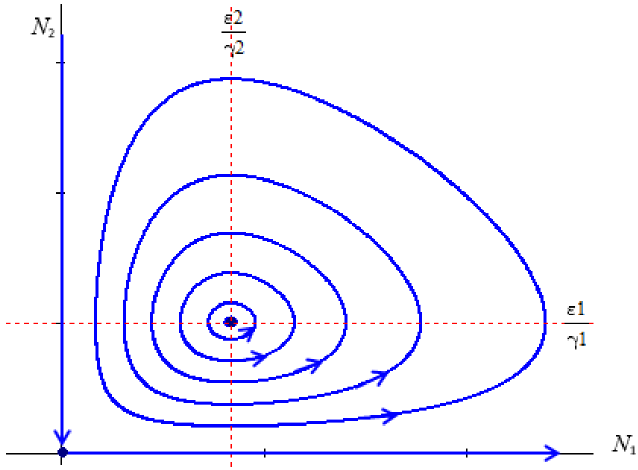


Точка P_1 является строгим максимумом функции $F(N_1, N_2)$. Плоскости $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ являются асимптотическими для поверхности $F(N_1, N_2)$.

Фазовые траектории системы (1), которые соответствуют ненулевым начальным условиям, являются замкнутыми линиями. Положение равновесия P_1 является **центром** (положение равновесия устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически).

Вывод 2. Система (1) имеет одно устойчивое, но не асимптотически, положение равновесия $P_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}, \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}\right)$, и одно неустойчивое - $P_0(0,0)$ при любых допустимых значениях параметров.

3. Фазовый портрет системы (1)



Прямые $N_1 = \dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$ и $N_2 = 0$ являются горизонтальными изоклинами, прямые $N_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ и $N_1 = 0$ – вертикальными изоклинами.

Вывод 3. Изменения численности жертвы и хищника во времени представляют собой колебания, причем колебания численности хищника отстают по фазе от колебаний жертв.

Анализируя фазовый портрет системы (1), можно ответить на следующие вопросы:

1) При какой численности хищника численность жертвы достигает максимального (минимального) значения?
2) При какой численности жертвы численность хищника достигает максимального (минимального) значения?
3) Могут ли численности жертвы и хищника одновременно возрастать (убывать)?
4) Может ли численность жертвы возрастать (убывать), а численность хищника убывать (возрастать)?