14.04.17

Занятие № 7. Устойчивость положений равновесия автономных систем (метод линеаризации Ляпунова, теорема Ляпунова)

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, y), \\ y'(t) = g(x, y), \end{cases} \qquad f, g \in C^2(D).$$

Поиск положений равновесия $P(x^*, y^*)$**:**

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Исследование на устойчивость по первому приближению[1] **(первый метод Ляпунова):**

Положение равновесия $P(x^*, y^*)$ асимптотически устойчиво, если все собственные значения матрицы линеаризованной системы имеют отрицательную вещественную часть. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $P(x^*, y^*)$ неустойчиво.

Матрица линеаризованной системы

$$A = \begin{pmatrix} f'_x(x^*, y^*) & f'_y(x^*, y^*) \\ g'_x(x^*, y^*) & g'_y(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0\,.$$

Условия асимптотической устойчивости положения равновесия

$$\operatorname{tr} A > 0, \quad \det A > 0.$$

Тип особой точки $P(x^*, y^*)$

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i \neq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$
узел	**седло**	**фокус**	**Центр или фокус (нужны дополнительные исследования)**

[1] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

$D \geq 0$ и $\det A > 0$	$\det A < 0$	$D < 0$ и $\mathrm{tr} A \neq 0$	$\det A > 0$ и $\mathrm{tr} A = 0$

Дискриминант характеристического уравнения: $D = (\mathrm{tr} A)^2 - 4 \cdot \det A$.

№ 2. Качественный анализ модели конкурентного взаимодействия двух «видов-близнецов»

Рассмотрим сообщество, состоящее из двух видов-близнецов (видов, совершенно равноправных в конкурирующем сообществе), динамика которого описывается системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = (\varepsilon - \alpha N_1 - \beta N_2) N_1, \\ \dfrac{dN_2}{dt} = (\varepsilon - \alpha N_2 - \beta N_1) N_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь:

$N_1(t)$, $N_2(t)$ – численности 1-го и 2-го вида соответственно, ε - коэффициент воспроизводства, α - коэффициент внутривидовой конкуренции, β – коэффициент межвидовой конкуренции.

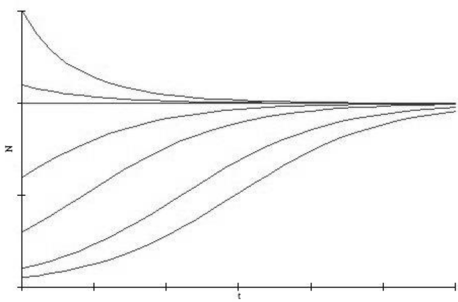
Параметры модели ε, α, β - const > 0.

***Обсуждаемые вопросы и задания*:**

1. Как изменяется численность первого вида в отсутствии второго?

   Свойства решений логистического уравнения

   $$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon - \alpha N_1) N_1$$



2. Докажите, что, если $N_1(0) \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} N_2(0)$, то $N_1(t) \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} N_2(t) \quad \forall t \geq 0$.

Свойства фазовых траекторий:

1) Фазовые траектории, соответствующие начальным условиям, когда $N_1(0) = N_2(0)$, лежат на прямой $N_1 = N_2$.
2) Фазовые траектории, соответствующие начальным условиям, когда $N_1(0) > N_2(0)$, лежат ниже прямой $N_1 = N_2$.
3) Фазовые траектории, соответствующие начальным условиям, когда $N_1(0) < N_2(0)$, лежат выше прямой $N_1 = N_2$.

3. Уменьшение размерности области параметров (с сохранением "симметричности" системы).

Если $N_1 = \frac{\varepsilon}{\alpha}u$, $N_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha}v$, $t = \frac{1}{\varepsilon}\tau$, $B = \dfrac{\beta}{\alpha} > 0$, то

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \left(1 - u - Bv\right)u, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = \left(1 - Bu - v\right)v \end{cases}$$

4. Существование и устойчивость положений равновесия

1) Поиск положений равновесия $\Leftrightarrow$ поиск неотрицательных решений системы:

$$\begin{cases} \left(1 - u - Bv\right)u = 0, \\ \left(1 - Bu - v\right)v = 0. \end{cases}$$

А) если $B \neq 1$: $P_0(0;0)$, $P_1(1;0)$, $P_2(0;1)$, $P_3\left(\frac{1}{B+1}, \frac{1}{B+1}\right)$;

Б) если $B=1$: $\left\{(u; 1-u),\ u \in [0;1]\right\} \cup \left\{(0;0)\right\}$.

2) Линеаризованная система в окрестности точки $P(u^*, v^*)$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \left(1 - 2u^* - Bv^*\right)\xi - Bu^*\eta, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = -Bv^*\xi + \left(1 - Bu^* - 2v^*\right)\eta. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $\xi(t) = u(t) - u^*$, $\eta(t) = v(t) - v^*$.

Асимптотическая устойчивость положения равновесия $P(u^*, v^*) \Leftrightarrow$ асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия линеаризованной системы в окрестности точки $P(u^*, v^*)$.

$P(u^*, v^*)$ – асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ_i матрицы системы (2) имеют отрицательную вещественную часть.

Результаты анализа положений равновесия

Матрица линеаризованной системы	λ_i	$B > 1$	$B < 1$	$B = 1$
$P_0(0;0)$				
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	Неустойчивый узел		
$P_1(1;0)$				
$\begin{pmatrix} -1 & -B \\ 0 & 1-B \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1 - B$	Устойчивый узел	Седло	
$P_2(0;1)$				
$\begin{pmatrix} 1-B & 0 \\ -B & -1 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1 - B$	Устойчивый узел	Седло	
$P_3\left(\frac{1}{B+1}; \frac{1}{B+1}\right)$, $u^* = v^* = \frac{1}{B+1}$				
$\begin{pmatrix} -u^* & -Bu^* \\ -Bu^* & -u^* \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = u^*(B-1)$, $\lambda_2 = -u^*(B+1)$	Седло	Устойчивый узел	

21.04.17

Занятие № 8. Качественный анализ НДС

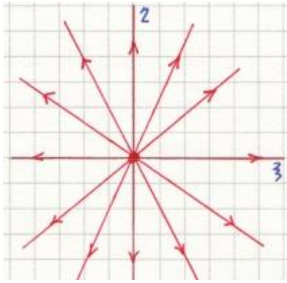
№ 2. Качественный анализ модели конкурентного взаимодействия двух «видов-близнецов» (продолжение)

5. Построение фазовых портретов линеаризованных систем

1) Построение фазового портрета линеаризованной системы в окрестности точки P_0

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \xi, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = \eta \end{cases}$$

Семейство фазовых траекторий описывает уравнение $\eta = C\xi$, $\forall C$. Точка P0 - дикритический

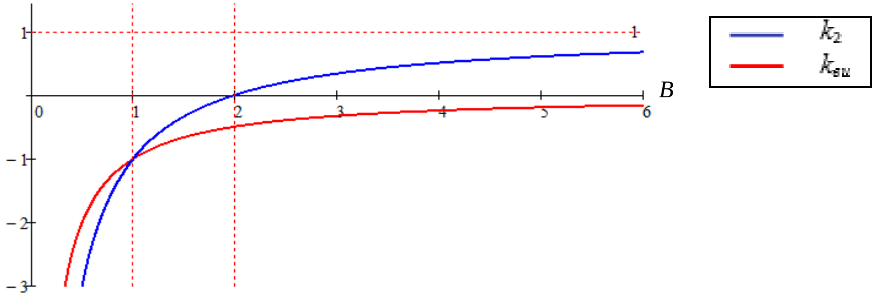


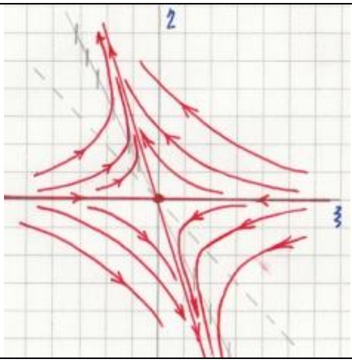
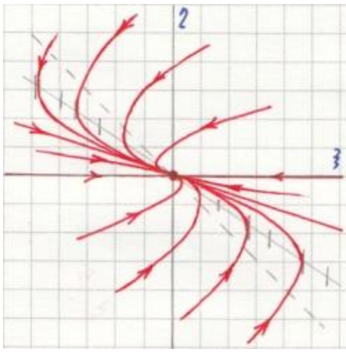
2) Построение фазового портрета линеаризованной системы в окрестности точки $P_1(1,0)$:

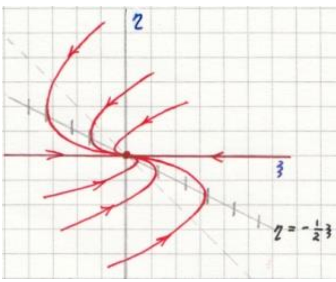
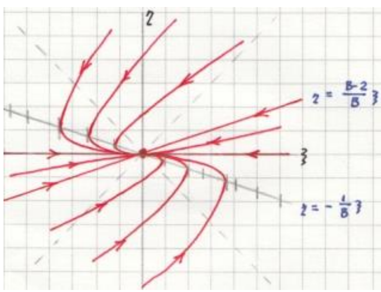
$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = -\xi - B\eta, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = (1-B)\eta. \end{cases}$$

Главные изоклины		Уравнения прямых $\eta = k\xi$ (сепаратрисы для седла)
вертикальная	горизонтальная	
$\eta = -\frac{1}{B}\xi$, $k_{ви} = -\frac{1}{B}$,	$\eta = 0$	$k = \frac{(1-B)k}{-1-Bk}$, $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{B-2}{B}$

Множество значений коэффициентов $k_{ви}$ и k_2 в зависимости от параметра B и их соотношение можно определить, анализируя графики:



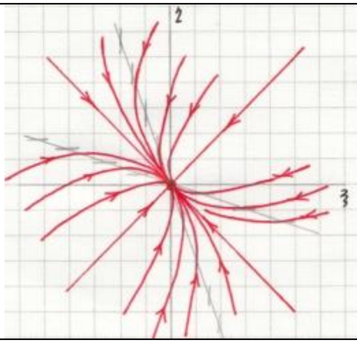
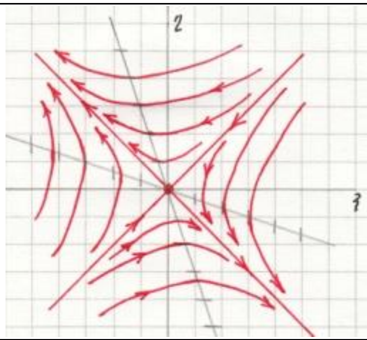
0<B<1	1<B<2
$k_2 < k_{ви} < -1$	$-1 < k_{ви} < k_2 < 0$ $-1 < k_{ви} < -1/2$
	

B=2	B>2
$k_{ви} = -1/2,\ k_2 = 0$	$-1/2 < k_{ви} < 0 < k_2 < 1$
	

3) Построение фазового портрета линеаризованной системы в окрестности точки P_3

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = -u^*\xi - Bu^*\eta, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = -Bu^*\xi - u^*\eta, \end{cases}$$

$$u^* = \frac{1}{B+1}$$

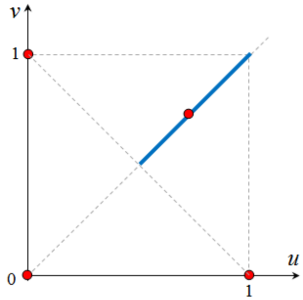
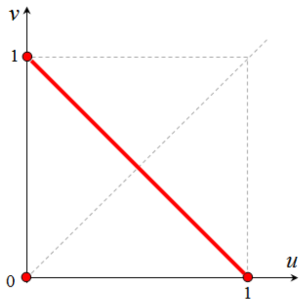
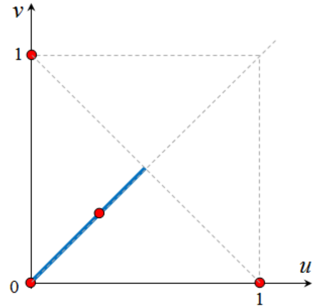
0<B<1	B>1
	

Построение фазовых портретов нелинейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = (1-u-Bv)u, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = (1-Bu-v)v \end{cases} \qquad (3)$$

где $B = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Геометрическое место точек P_i

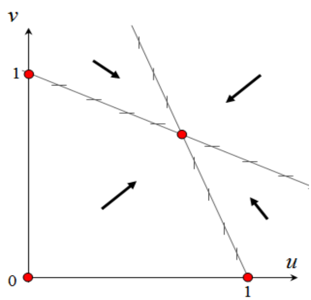
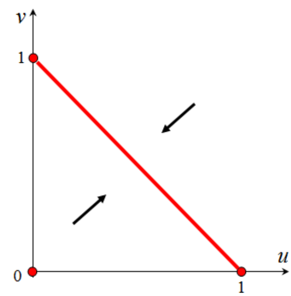
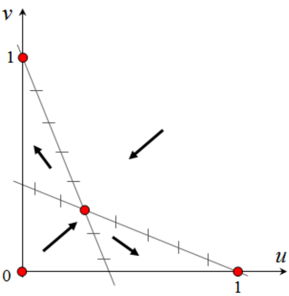
0 < B < 1	B = 1	B > 1
 *Выделенный отрезок – геометрическое место точек* $P_3\left(\frac{1}{B+1};\frac{1}{B+1}\right)$		 *Выделенный отрезок – геометрическое место точек* $P_3\left(\frac{1}{B+1};\frac{1}{B+1}\right)$

Главные изоклины:

Вертикальные: $$(1-u-Bv)u=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u=0, \\ 1-u-Bv=0; \end{array}\right.$$

Горизонтальные: $$(1-Bu-v)v=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} v=0, \\ 1-Bu-v=0. \end{array}\right.$$

Области возрастания и убывания функций $u(\tau)$ и $v(\tau)$:

0 < B < 1	B = 1	B > 1
		
↗ u, v – возрастают; ↙ u, v – убывают; ↘ u – возрастает, а v – убывает; ↖ u – убывает, а v - возрастает		

Выпуклость/вогнутость фазовой траектории относительно оси 0u

Так как в силу системы (3)

$$\frac{dv}{du} = \frac{(1-v-Bu)v}{(1-u-Bv)u},$$

и

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{(1-v-Bu)v}{(1-u-Bv)u}\right)\cdot\frac{d\tau}{du} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{(1-v-Bu)v}{(1-u-Bv)u}\right)\cdot\frac{1}{(1-u-Bv)u}$$

то[2] $$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{uv(u-v)(1-B)\left(2+B(u^2+v^2)-(B+2)(u+v)+2uv\right)}{u^3(1-u-Bv)^3}$$

Границы областей знакопостоянства производной *v*”:

прямые: $u = 0$, $v = 0$, $1 – u – \mathrm{B}v = 0$;

линия 2-го порядка:

$B(u^2 + v^2) – (\mathrm{B}+2)(u + v) + 2uv + 2 = 0$ – гипербола, если $0 < \mathrm{B} < 1$,

эллипс, если $\mathrm{B} > 1$.

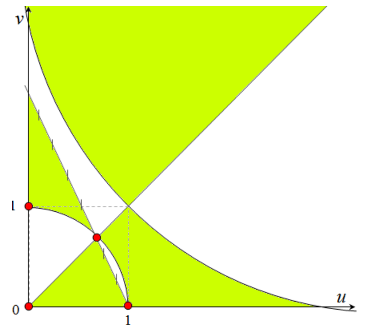
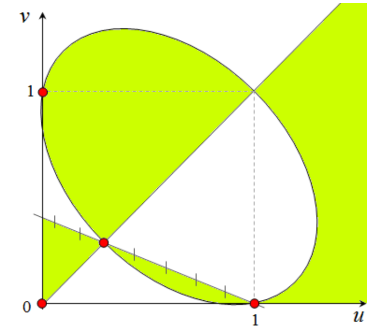
---

[2] Если функция задана параметрически $\begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases}$ то для построения производной v''_{uu} используется правило $v''_{uu} = \dfrac{v''_{tt}u'_t - u''_{tt}v'_t}{(u'_t)^3}$.

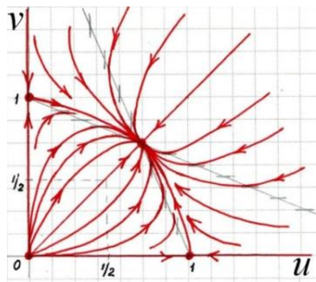
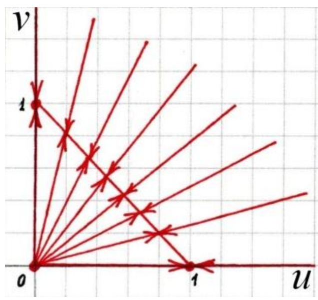
Если $\begin{cases} u'(t) = f(u,v), \\ v'(t) = g(u,v), \end{cases}$ то для построения производной v''_{uu} используется правило

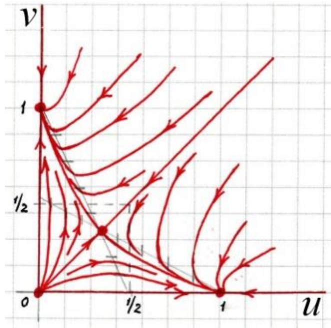
$$v''_{uu} = \frac{\dfrac{dg(u,v)}{dt}f(u,v) - \dfrac{df(u,v)}{dt}g(u,v)}{(f(u,v))^3}.$$

Области знакопостоянства производной v''_{uu} :

0 < B < 1	B > 1	Пояснение
		В закрашенных областях фазовые траектории имеют выпуклость вниз по отношению к оси 0u

Фазовые портреты

0 < B < 1 ($\beta < \alpha$ - сильнее выражена внутривидовая конкуренция) При ненулевых начальных численностях обоих видов наблюдается стабилизация их численности на равновесном уровне, равном $\frac{1}{B+1}$. При нулевой численности одного вида численность второго стремится к равновесной, равной 1.	
B = 1 ($\beta = \alpha$ - нет доминирования одного вида над другим). С течением времени наблюдается стабилизация на равновесном уровне. Численности видов в равновесии зависят от начальных, но суммарная численность обоих видов в равновесии равна 1.	

B > 1 ($\beta > \alpha$ - сильнее выражена межвидовая конкуренция). При разных начальных численностях видов выживает тот вид, у которого начальная численность больше. Численность этого вида стабилизируется на равновесном уровне, равном 1. Но при одинаковых начальных численностях видов наблюдается с течением времени стабилизация их численностей на одном и том же уровне, равном $\frac{1}{B+1}$.	

Домашнее задание

Покажите, что уравнение $B(u^2 + v^2) - (B+2)(u + v) + 2uv + 2 = 0$ определяет:

1) гиперболу, если 0 < B < 1,
2) эллипс, если B > 1.

Покажите, что эти линии проходят через точки (1,0), (0, 1), (1/B+1; 1/B+1) и (1, 1). Найдите центр гиперболы (эллипса).