24.03.2017

Занятия № 4. Существование и устойчивость положений равновесия линейных динамических (ЛДС) систем на плоскости

№ 1. Построить параметрический портрет и соответствующие фазовые портреты ЛДС ($x, y \in$ R, $a \in$ R):

$$\begin{cases} x'(t) = 2ax + y, \\ y'(t) = -2ax + ay. \end{cases} \tag{1}$$

Параметрическое пространство – числовая прямая R. **Фазовое пространство** – числовая плоскость $\{(x, y) : x, y \in R\}$.

Положения равновесия ЛДС вида

$$X'(t) = A\,X(t) \tag{*}$$

определяются, решая уравнение

$$A\,X = 0.$$

Динамическая система (*) имеет:

1) одно положение равновесия P(0,0), если $\det A \neq 0$;
2) бесконечное множество положений равновесия, если $\det A = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ -2a & a \end{vmatrix} = 0 \iff a(a+1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = 0. \end{array}\right.$$

Вывод 1.

1. Система (1) имеет одно положение равновесия P(0,0) для $a \in$ R\{-1; 0}.
2. Если a=0 система (1) имеет бесконечное множество положений равновесия P$\in$\{(x,0), $x \in$R\}.
3. Если a=–1 система (1) имеет бесконечное множество положений равновесия P$\in$\{(x,2x), $x \in$R\}.

Условия устойчивости положения равновесия для линейной системы (*) с постоянными коэффициентами.

1. Положение равновесия P(0,0) системы (*) асимптотически устойчиво, если все собственные значения матрицы A системы имеют отрицательную вещественную часть: Reλ_1<0, Reλ_2<0.
2. Если хотя бы одно из собственных значений имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия не является устойчивым.
3. Если Re$\lambda_{1,2} \leq 0$ и λ_i, для которого Reλ_i =0 является простым корнем характеристического уравнения для матрицы A, то положение равновесия устойчиво, но не асимптотически.
4. Если $\lambda_1=\lambda_2=0$ и положения равновесия лежат на одной прямой, то все они неустойчивы.

Характеристическое уравнение для матрицы A системы (*):

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}A\cdot\lambda + \det A = 0 \qquad (**)$$

Условия асимптотической устойчивости положения равновесия P(0,0):

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0,\ \mathrm{Re}\lambda_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tr}A < 0, \\ \det A > 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для матрицы системы (1):

$$\lambda^2 - 3a\lambda + 2a(a+1) = 0 \qquad (2)$$

Вывод 2.

Положение равновесия P(0,0) асимптотически устойчиво, если $a < -1$.

Классификация точек покоя на плоскости:

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i \neq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$
узел	**седло**	**фокус**	**центр**
$D \geq 0$ и $\det A > 0$	$\det A < 0$	$D < 0$ и $\mathrm{tr}A \neq 0$	$\det A > 0$ и $\mathrm{tr}A = 0$

Дискриминант уравнения (**): $D = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\cdot \det A$.

Вывод 3.

1. Так как дискриминант уравнения (2) равен $D = a(a-8)$, то в зависимости от значений параметра a положение равновесия P(0,0) имеет тип:

$a < -1$	$-1 < a < 0$	$0 < a < 8$	$a \geq 8$
Устойчивый узел	седло	Неустойчивый фокус	Неустойчивый узел

2. Если $a = -1$, то $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -3$. Следовательно, все положения равновесия (на прямой $y = 2x$) устойчивы, но не асимптотически.

3. Если $a = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Следовательно, все положения равновесия (на прямой $y = 0$) неустойчивы.

Построение фазового портрета для ЛДС см.

http://pmik.karelia.ru/user/semenova/Nonlinear_Dynamics/DOC/Analys_DS.pdf

или

http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Nonlinear_Dynamics/DOC/Analys_DS.pdf

Фазовые портреты системы (1) для различных областей параметрического пространства

1) *Главные изоклины*
   А) вертикальная: $y = -2ax$,
   Б) горизонтальная: $y = 2x$, $a \neq 0$ ($y = C$, $C \in$ R, $a = 0$).
2) *Прямые, содержащие фазовые траектории* (сепаратрисы для седла):

$$y = kx,$$

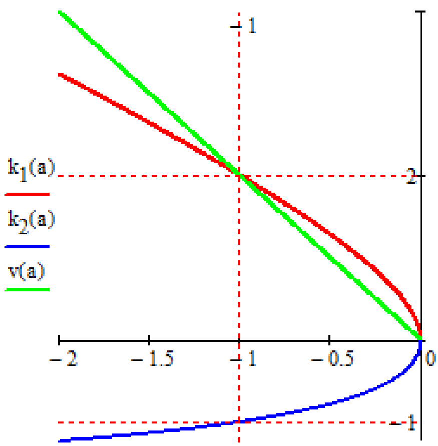
$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=kx} \overset{(1)}{=} \left.\frac{-2ax + ay}{2ax + y}\right|_{y=kx} = \frac{-2a + ak}{2a + k} \;\Rightarrow\; k^2 + ak + 2a = 0.$$

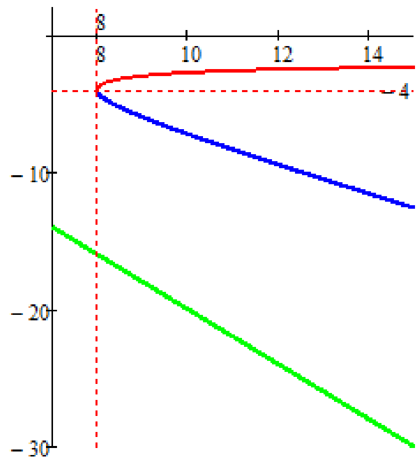
$$k_1(a) = \frac{-a + \sqrt{a(a-8)}}{2}, \qquad k_2(a) = \frac{-a - \sqrt{a(a-8)}}{2}$$

Взаимное расположение прямых:

$$y = -2ax = v(a)x, \quad y = 2x, \quad y = k_1(a)x, \quad y = k_2(a)x$$

можно выяснить, установив множество значений их угловых коэффициентов.





Область 1 ($a < -1$)

$$2 < k_1(a) < -2a, \quad k_2(a) < -1$$

Фазовые траектории касаются прямой $y = k_1(a)x$ в точке P(0,0).

Пусть $a = -2$.

1) *Главные изоклины*

А) вертикальная: $y = 4x$ (зеленая линия на рис. 1),

Б) горизонтальная: $y = 2x$ (синяя линия на рис. 1).

2) *Прямые, содержащие фазовые траектории*:

$$y = kx,$$

$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=kx} \stackrel{(1)}{=} \left.\frac{4x-2y}{-4x+y}\right|_{y=kx} = \frac{4-2k}{-4+k} \Rightarrow k^2 - 2k - 4 = 0.$$

$$k_1 = 1+\sqrt{5}, \qquad k_2 = 1-\sqrt{5}$$

Заметим, что $3 < k_1 < 4, \quad k_2 < -1.$

Анализируя взаимное расположение главных изоклин и прямых, содержащих фазовые траектории (**прямая** $y = k_1 x$ **– между вертикальной и горизонтальной изоклинами**), можно сделать вывод, что фазовые траектории касаются прямой $y = k_1 x$ в точке P(0,0).

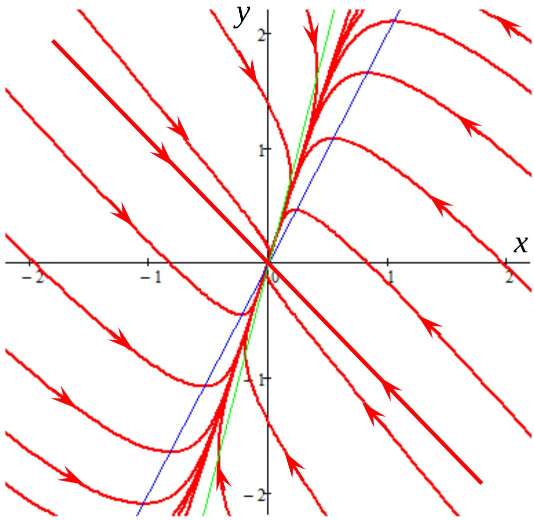


Рис. 1. Типичный фазовый портрет системы (1) для значений параметра $a < -1$

Так как P(0,0) - устойчивый узел, то направление движения по фазовым траекториям – к положению равновесия.

Домашнее задание

Изучить материал презентации:
http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Nonlinear_Dynamics/DOC/Analys_DS.pdf

31.03.2017

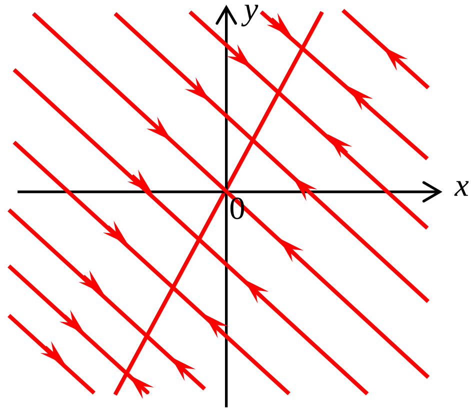
Занятия № 5. Существование и устойчивость положений равновесия линейных динамических (ЛДС) систем на плоскости (продолжение)

Область 2 ($a = -1$)

Прямая точек покоя $y = 2x$.
Уравнения других фазовых траекторий определяет первый интеграл системы (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{-2x + y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -1,$$

$$y = -x + C, \quad C \in R.$$



Так как $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0} = 2x$, то фазовые прямые $y = -x + C$ пересекают ось x снизу вверх, если $x > 0$, и сверху вниз, если $x < 0$.

Область 3 ($-1 < a < 0$)

$$0 < -2a < k_1(a) < 2, \quad -1 < k_2(a) < 0$$

Например, при $a = -1/2$:

1) *Главные изоклины*
   А) вертикальная: $y = x$ (зеленая линия на рис. 2),
   Б) горизонтальная: $y = 2x$ (синяя линия на рис. 2).

2) *Прямые, содержащие фазовые траектории*:

$$y = kx,$$

$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=kx} \overset{(1)}{=} \left.\frac{x - \frac{1}{2}y}{-x + y}\right|_{y=kx} = \frac{2-k}{-2+2k} \Rightarrow 2k^2 - k - 2 = 0.$$

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}, \qquad k_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}.$$

Заметим, что $1{,}25 < k_1 < 1{,}5, \qquad -1 < k_2 < -0{,}75.$

Так как $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0} = -2ax$, то фазовые траектории пересекают ось x снизу вверх, если $x > 0$, и сверху вниз, если $x < 0$.

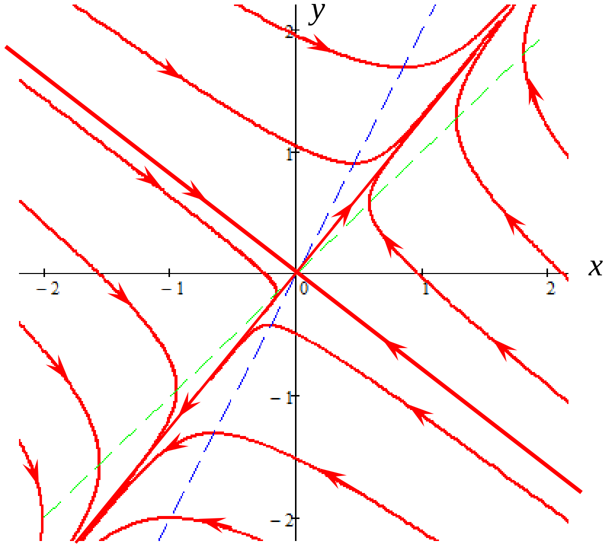


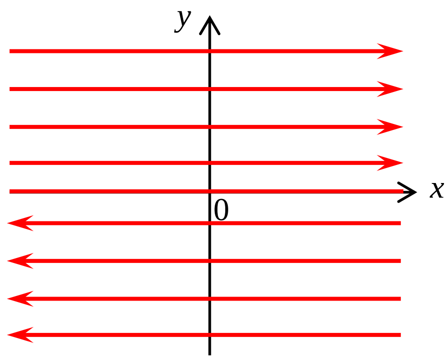
Рис. 2. Типичный фазовый портрет системы (1) для значений параметра $a \in (-1; 0)$

Сепаратрисы $y = k_1(a)x$ (лежит между вертикальной и горизонтальной изоклинами) и $y = k_2(a)x$ (проходит во 2 и 4 четвертях фазовой плоскости) являются асимптотами других фазовых траекторий (ветви гипербол).

Область 4 (a = 0)

Прямая точек покоя $y = 0$.
Уравнения других фазовых траекторий определяет первый интеграл системы (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 0, \quad y = C, \quad C \in R.$$



Так как $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = y$, то фазовые прямые $y = C$ пересекают ось y слева направо, если $y > 0$, и справа налево, если $y < 0$.

Область 5 ($0 < a < 8$)

Для фокуса прямых с фазовыми траекториями нет.

Угловой коэффициент вертикальной изоклины $-2a \in (-16, 0)$.

Так как фокус является неустойчивым, то направление движения от точки покоя. Так как $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0} = -2ax$ и $-2a < 0$, то фазовые траектории пересекают ось x сверху вниз, если $x > 0$, и снизу вверх, если $x < 0$. Следовательно, движение по фазовым траекториям соответствует движению по часовой стрелке.

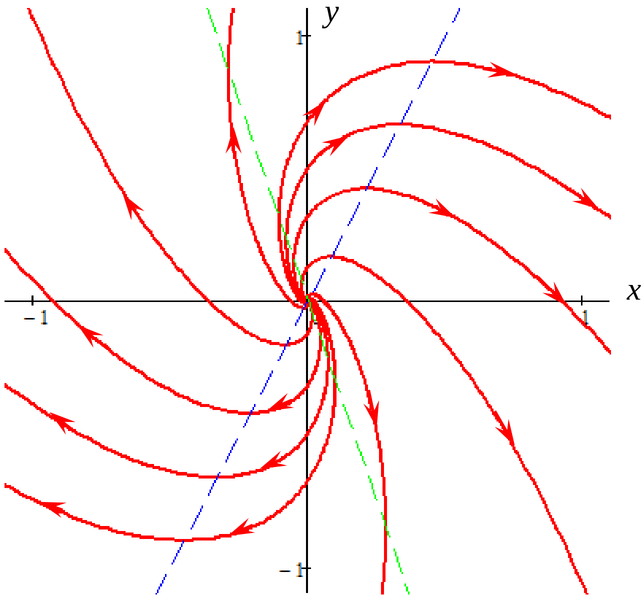


Рис. 3. Типичный фазовый портрет системы (1) для значений параметра $a \in (0; 8)$

Область 6 ($a \geq 8$)

При a=8 положение равновесия P(0,0) – **вырожденный узел**, так как $k_1(8) = k_2(8) = -4$. Все фазовые траектории, образующие ветви парабол, касаются прямой $y = -4x$. См. рис. 4.

При $a > 8$: $-2a < k_2(a) < k_1(a) < 0$. Так как прямая $y = -2ax$ является вертикальной изоклиной, то, анализируя взаимное расположение изоклин и прямых с фазовыми траекториями, можно сделать вывод, что фазовые траектории, образующие ветви парабол, касаются прямой $y = k_2(a)x$.

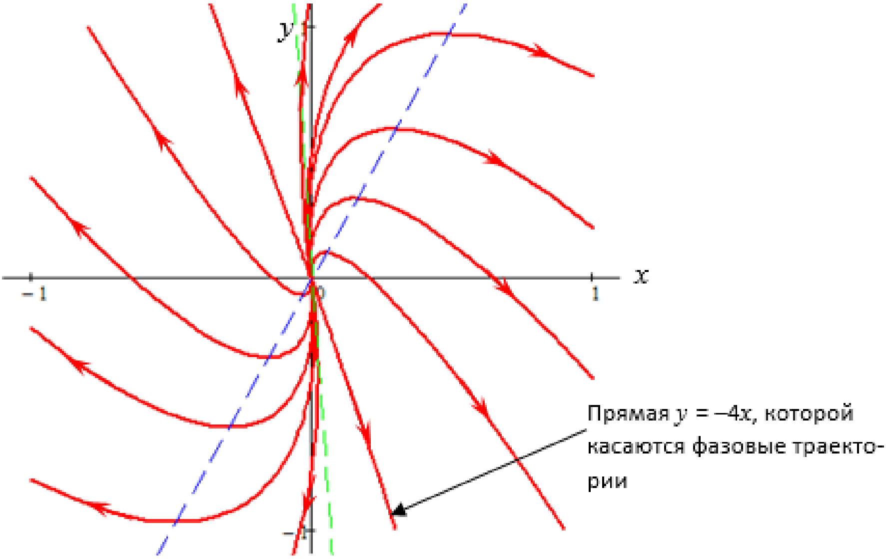


Рис. 4. Фазовый портрет системы (1) для значений параметра a = 8

Домашнее задание

Построить параметрический портрет и соответствующие фазовые портреты ДС ($x, y \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$):

$$\begin{cases} x'(t) = x + (2-a)y, \\ y'(t) = ax - 3y. \end{cases}$$

7.04.2017

Занятия № 6. Существование и устойчивость положений равновесия линейных динамических (ЛДС) систем на плоскости

№ 3. Система линейных химических реакций

Вещество X поступает извне с постоянной скоростью, превращается в вещество Y и со скоростью, пропорциональной концентрации вещества Y выводится из сферы реакции. Все реакции имеют первый порядок, за исключением притока вещества извне, имеющего нулевой порядок. Схема реакции имеет вид:

$$\xrightarrow{k_1} X \xrightarrow{k_2} Y \xrightarrow{k_3}$$

и описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x, \\ \frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y. \end{cases} \quad (3)$$

Установите качественные свойства решений системы.

План анализа

1. **Уменьшение размерности области параметров**

   С помощью преобразования переменных x, y, t:

$$x = \alpha u, \quad y = \beta v, \quad t = \gamma \tau, \quad (4)$$

   система (3) приводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \dfrac{k_1 \gamma}{\alpha} - k_2 \gamma u, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = \dfrac{k_2 \gamma \alpha}{\beta} u - k_3 \gamma v \end{cases} \quad (5)$$

   Коэффициенты α, β, γ преобразования (4) выберем так, чтобы выполнялись условия

$$k_2 \gamma = 1, \quad \frac{k_1 \gamma}{\alpha} = 1, \quad \frac{k_2 \gamma \alpha}{\beta} = 1.$$

   Откуда найдем

$$\alpha = \frac{k_1}{k_2}, \quad \beta = \frac{k_1}{k_2}, \quad \gamma = \frac{1}{k_2}.$$

   И тогда в новых переменных получим систему с одним параметром

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = 1 - u, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = u - Av, \end{cases} \quad (6)$$

   где $A = \dfrac{k_3}{k_2} > 0.$

2. **Определение положения равновесия**

$$\begin{cases} 1 - u = 0, \\ u - Av = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ v = \dfrac{1}{A}. \end{cases}$$

   Система (6) имеет единственное положение равновесия при любых допустимых значениях параметра A.

3. Исследование положения равновесия на устойчивость

Введем новую систему координат с центром в точке покоя:

$$\xi = u - 1, \quad \eta = v - \frac{1}{A}. \tag{7}$$

Система (6) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = -\xi \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = \xi - A\eta. \end{cases} \tag{8}$$

Собственные значения матрицы системы (8):

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -A < 0.$$

Так как собственные значения вещественные и отрицательные при любых допустимых значениях параметра A, то положение равновесия – **устойчивый узел**.

4. Фазовый портрет системы (6)

1) вертикальная изоклина: $u = 1$.

   горизонтальная изоклина: $v = \dfrac{1}{A}u.$

2) прямые вида $\eta = k\xi$:

$$k = \left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\eta = k\xi} \overset{(8)}{=} \frac{1 - Ak}{-1} \quad \Rightarrow \quad (A-1)k = 1.$$

А) если $A \neq 1$, то

$$k_1 = \frac{1}{A-1} \text{ и } \eta = \frac{1}{A-1}\xi \quad \Rightarrow v = \frac{1}{A-1}u - \frac{1}{A(A-1)}.$$

$$k_2 = \infty \text{ и } \xi = 0 \quad \Rightarrow u = 1.$$

Если $A \in (0, 1)$, то $k_1 \in (-\infty, -1)$.

Если $A > 1$, то $k_1 \in (0, +\infty)$ и $k_1 > 1/A$.

Б) если $A = 1$, то $k_1 = k_2 = \infty$ и $\xi = 0 \quad \Rightarrow u = 1$. В этом случае точка покоя – вырожденный узел.

Замечание. Уравнения прямых с фазовыми траекториями можно искать и в виде $\xi = k\eta$. Тогда

$$k = \left.\frac{d\xi}{d\eta}\right|_{\xi = k\eta} \overset{(8)}{=} \frac{-k}{k - A} \quad \Rightarrow \quad k(k - (A-1)) = 1 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0, \\ k = A - 1. \end{array}\right.$$

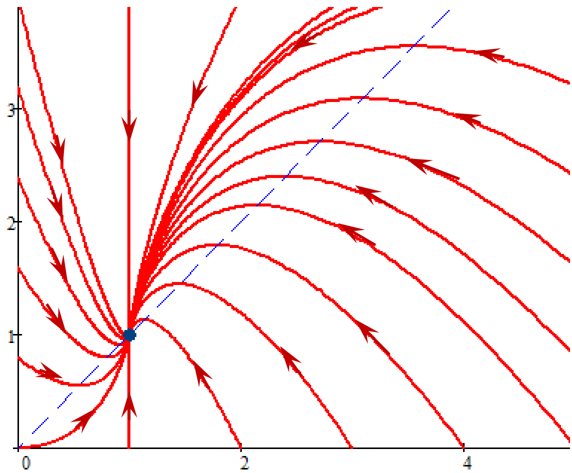
Если $A \neq 1$, то

$$k_1 = 0 \text{ и } \xi = 0 \quad \Rightarrow u = 1.$$

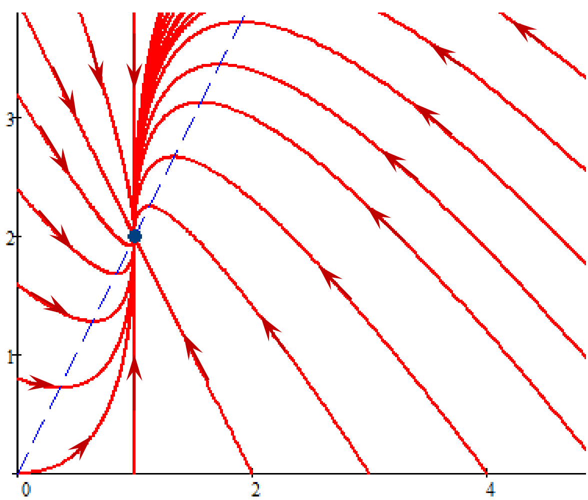
$$k_2 = A - 1 \text{ и } \xi = (A-1)\eta \quad \Rightarrow v = \frac{1}{A-1}u - \frac{1}{A(A-1)}.$$

Если $A = 1$, то $k_1 = k_2 = 0$ и $\xi = 0 \quad \Rightarrow u = 1.$

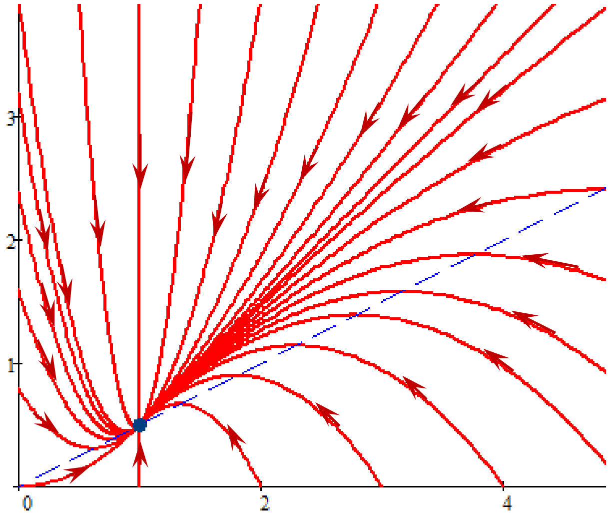
Фазовый портрет в случае $A = 1$



Фазовый портрет в случае $A < 1$



Фазовый портрет в случае $A > 1$



Вывод. Положение равновесия (стационарное состояние) системы представляет собой устойчивый узел. При этом концентрация вещества X стремится к стационарному состоянию всегда монотонно, концентрация вещества Y может проходит через min или max. Колебательные режимы в такой системе невозможны.

Домашнее задание

Построить параметрический портрет (бифуркационную диаграмму) ЛДС ДС ($x, y \in \mathbf{R}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$):

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x + \beta y, \\ y'(t) = \gamma x + \delta y. \end{cases}$$