17.03.2017

Занятие № 3. Динамические системы с непрерывным временем на прямой.

Задача 4. Построить бифуркационную диаграмму и типичные фазовые портреты для динамической системы:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u + 2u^3 - u^5, \quad u \in \mathrm{R}, \quad \alpha \in \mathrm{R}. \qquad (1)$$

Решение уравнения

$$f(u,\alpha) = \alpha u + 2u^3 - u^5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(\alpha + 2u^2 - u^4) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0, \\ \alpha + 2u^2 - u^4 = 0 \end{array}\right.$$

на плоскости (α,u) определяет геометрическое место положений равновесия заданной системы при различных значениях параметра α. Это прямая l_1: $u=0$ и парабола l_2: $\alpha=u^2(u^2-2)$. Нетрудно найти вершины параболы – точки $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, и точки пересечения параболы с осями – $(-1, \sqrt{2})$, $(-1, -\sqrt{2})$, $(0, 0)$ (см. рис. 1).

Вывод 1. *В зависимости от значения параметра α уравнение (1) имеет следующее количество положений равновесия:*

$\alpha < -1$	$\alpha = -1$	$-1 < \alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
1	3	5	3	3

Прямая l_1 и парабола l_2 разбивают плоскость на четыре области, где сохраняется знак выражения $f(u,\alpha) = \alpha u + 2u^3 - u^5$. Это разбиение показано на рис. 1. Области, в точках которых выражение $f(u,\alpha)$ принимает положительные значения, помечены знаком «+» и выделены цветом; области, в точках которых выражение $f(u,\alpha)$ принимает отрицательные значения, помечены знаком «–». Так как $u'(t) = f(u,\alpha)$, то в тех областях, где $f(u,\alpha) > 0$, функция $u(t)$ растет, а где $f(u,\alpha) < 0$, функция $u(t)$ убывает. На рис. 1 стрелки указывают направление изменения u.

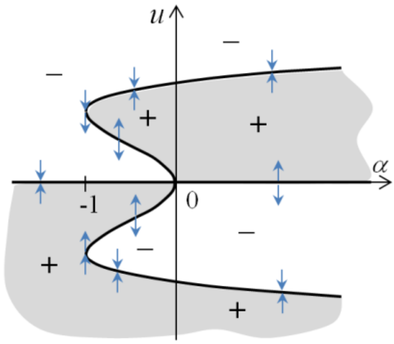


Рис. 1

В соответствии с установленным направлением участки прямой l_1 и параболы l_2 с неустойчивыми особыми точками заменяем пунктирной линией. В результате получаем бифуркационную диаграмму на рис. 2.

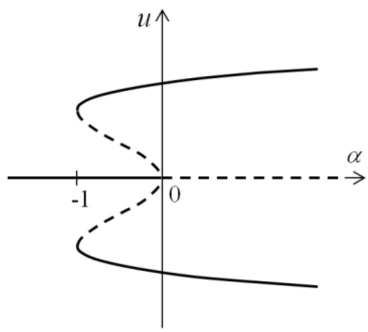


Рис. 2

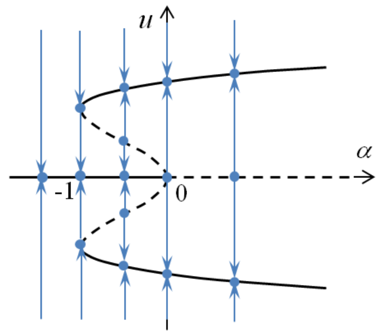


Рис. 3

Вывод 2. *Значения параметра $\alpha = -1$ и $\alpha = 0$ являются точками бифуркации. При $\alpha = -1$ имеют место локальные бифуркации типа «седло-узел», а при $\alpha = 0$ – локальная бифуркация типа «вилка».*

Сечения на бифуркационной диаграмме (рис. 3) для различных значений параметра α дают типичные фазовые портреты системы (1).

Задача 8. Выполнить качественное исследование уравнения, описывающего динамику численности популяции:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \frac{\beta N^2}{\beta + \tau N} - \gamma N - \delta N^2, \qquad \alpha, \beta, \tau, \gamma, \delta - const > 0. \qquad (1)$$

1. Уменьшение размерности области параметров.
   Результат: с помощью линейного преобразования

$$N = \frac{\beta}{\tau} u, \quad t = \frac{\tau}{\beta\alpha} v$$

уравнение (1) приводится к виду:

$$\frac{du}{dv} = \frac{u^2}{1+u} - Au - Bu^2, \quad A, B > 0. \qquad (2)$$

где $A = \frac{\gamma\tau}{\beta\alpha}$, $\quad B = \frac{\sigma}{\alpha}$,

2. Поиск положений равновесия уравнения (2).

Рекомендация: найти неотрицательные корни уравнения $f(u)=0,$ где

$$f(u)=\frac{u^2}{1+u}-Au-Bu^2.$$

$$\begin{cases} f(u)=0, \\ u\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0, \\ \begin{cases} \dfrac{u}{1+u}-A-Bu=0, \\ u\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0, \\ \begin{cases} Bu^2+(A+B-1)u+A=0, \\ u\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Результат:

1) Уравнение (2) имеет 3 положения равновесия:

$$u_1=0,\quad u_{2,3}=\frac{1-A-B\pm\sqrt{D}}{2B},\quad u_2<u_3,\ D=(1-A-B)^2-4AB,$$

если $\begin{cases} D>0, \\ A+B-1<0. \end{cases}$ (3)

2) Уравнение (2) имеет 2 положения равновесия:

$u_1=0,\ \ u_{2,3}=\dfrac{1-A-B}{2B},$ если $\begin{cases} D=0, \\ A+B-1<0. \end{cases}$ (4)

3) Уравнение (2) имеет одно положение равновесия $u_1=0,$ если

$\left[\begin{array}{l} D<0, \\ A+B-1\ge 0. \end{array}\right.$ (5)

Условия (3), (4), (5) определяют в пространстве значений параметров (A, B) области существования одного, двух и трех положений равновесия, которые обозначим соответственно G_1 , G_2 и G_3.

3. Анализ на устойчивость положений равновесия уравнения (2).

Правила:

- Если $f'(u^*)<0$, то положение равновесия u^* асимптотически устойчиво.
- Если $f'(u^*)>0$, то положение равновесия u^* неустойчиво.
- Если $f'(u^*)=0$ и $f''(u^*)\neq 0$, то положение равновесия u^* неустойчиво (точнее полуустойчиво).

Пусть $g(u)=\left(\dfrac{u}{1+u}-A-Bu\right),$ тогда

$$f'(u)=g(u)+ug'(u),\quad f''(u)=2g'(u)+g''(u)u$$

и

$$g'(u) = \frac{1}{(1+u)^2} - B, \qquad g''(u) = -\frac{2}{(1+u)^3}.$$

Результат:

1) Положения равновесия $u_1 = 0$ асимптотически устойчиво при любых допустимых значениях параметров A и B.
2) Положение равновесия u_2 полуустойчиво в области G_2 и неустойчиво в области G_3.

Замечание.

Область G_2:

А) Так как u_2 – корень уравнения

$$Bu^2 - (1 - A - B)u + A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(u) \equiv \frac{u}{1+u} - A - Bu = 0$$

кратности 2, то $g(u_2) = 0$ и $g'(u_2) = 0$. Следовательно, $f'(u_2)=0$.

Б) $f''(u_2)= g''(u_2)u_2 = -2u_2(1+u_2)^{-3} \neq 0.$

Область G_3:

Так как u_2 и u_3 – корни уравнения ($u_2 < u_3$)

$$Bu^2 - (1 - A - B)u + A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(u) \equiv \frac{u}{1+u} - A - Bu = 0,$$

то имеем:

$$g(u_2) = 0,$$

$$f'(u_2) = g(u_2) + u_2 g'(u_2) = u_2 g'(u_2) = u_2\left(\frac{1}{(1+u_2)^2} - B\right),$$

$$(1+u_2)^2 = 1 + 2u_2 + u_2^2 < 1 + u_2 + u_3 + u_2 u_3 = 1 + \frac{1-A-B}{B} + \frac{A}{B} = \frac{1}{B}. \text{и,}$$

следовательно, $f'(u_2) > 0$.

3) Положение равновесия u_3 асимптотически устойчиво.

Область G_3:

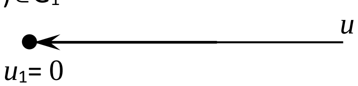
Так как u_2 и u_3 – корни уравнения $Bu^2 - (1 - A - B)u + A = 0$ и $u_2 < u_3$, то

$$(1+u_3)^2 = 1 + 2u_3 + u_3^2 > 1 + u_2 + u_3 + u_2 u_3 = 1 + \frac{1-A-B}{B} + \frac{A}{B} = \frac{1}{B}.$$

и, следовательно, $f'(u_3) < 0$.

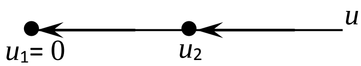
4. Фазовые портреты уравнения (2)

1) $(A, B) \in G_1$



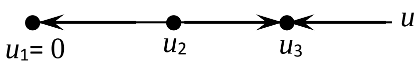
Интерпретация: при любой начальной численности популяции наблюдается ее вырождение ($u(t) \to 0$ при $t \to +\infty$).

2) (A, B)$\in$G$_2$



Интерпретация: если начальная численность меньше u_2, то наблюдается вырождение популяции, если начальная численность больше u_2, то наблюдается стабилизация численности на равновесном уровне u_2.

3) (A, B)$\in$G$_3$



Интерпретация: если начальная численность меньше u_2, то наблюдается вырождение популяции, если начальная численность больше u_2, то наблюдается стабилизация численности на равновесном уровне u_3.

Домашнее задание

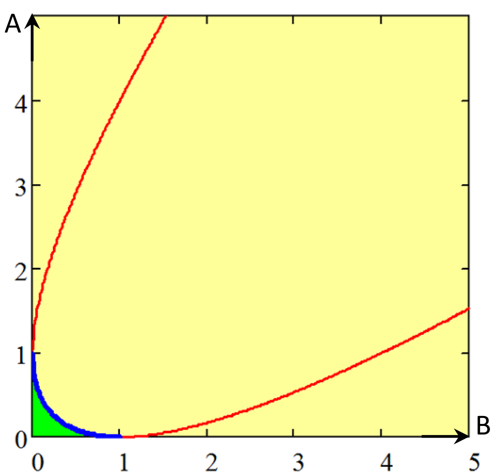
В первой четверти плоскости (A,B) построить области существования одного (G_1), двух (G_2) и трех положений равновесия (G_3).

Построение областей существования трех положений равновесия, двух положений равновесия и одного положения равновесия (параметрический портрет уравнения (2))

Результат:

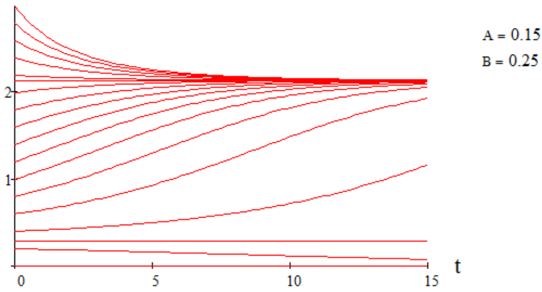
Уравнение параболы:

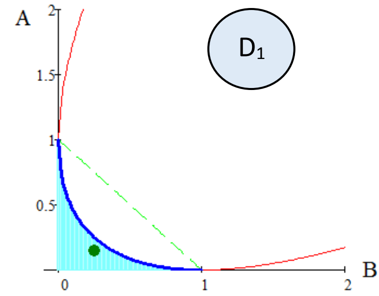
$$(1-A-B)^2-4AB=0 \quad \Leftrightarrow \quad (A-B)^2-2(A+B)+1=0$$

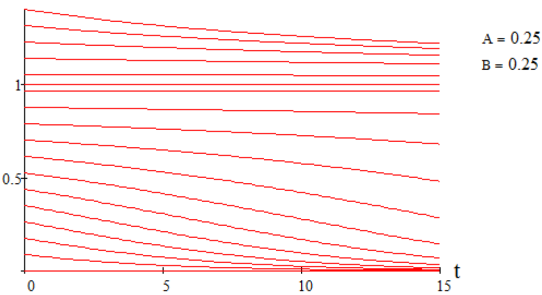


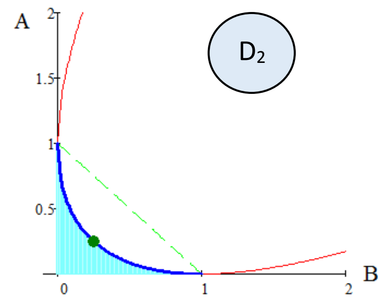
D$_3$	(зелёный)	Три положения равновесия
D$_2$	(синий)	Два положения равновесия
D$_1$	(жёлтый)	Одно положение равновесия

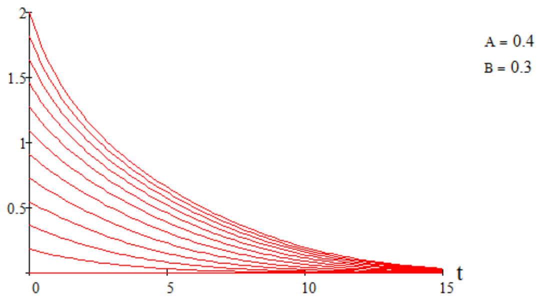
Интегральные кривые уравнения (2), соответствующие различным областям параметрического пространства

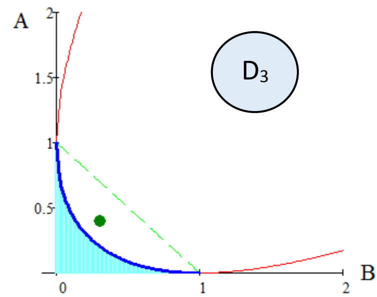












Бифуркации в ДС (2)