

## Что такое нелинейная динамика?

**Нелинейная динамика** – это наука, изучающая структуру и свойства эволюционных процессов в нелинейных динамических системах. Как научное направление, нелинейная динамика сформировалась сравнительно недавно, за последние примерно 30-35 лет.<sup>1</sup>

Под *динамической системой* будем понимать систему любой природы (физическую, химическую, биологическую, социальную, экономическую и т. д.), состояние которой изменяется (дискретно или непрерывно) во времени.

Нелинейная динамика использует при изучении систем нелинейные математические модели, чаще всего дифференциальные уравнения и дискретные отображения.

Базовую основу нелинейной динамики составляют следующие разделы:

- 1) теория динамических систем,
- 2) теория устойчивости и бифуркаций,
- 3) механизмы формирования режимов детерминированного хаоса,
- 4) теория фракталов и размерности.

Одним из центральных понятий нелинейной динамики является понятие «система».

**Система** (от греч. *systema* – целое, составленное из частей, соединение) – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство.

Любую систему будем характеризовать некоторым набором величин. Величины, которые можно измерить, называют *физическими*. Такими являются, например, «длина», «температура», «цена».

---

<sup>1</sup> О событиях, связанных с развитием нелинейной динамики, и событиях из жизни ее создателей со времен, когда термина «нелинейная динамика» еще не было, можно узнать из книги: Трубецков Д. И. *Наука о сложностях в лицах, датах и судьбах. Как закладывались основы синергетики: Пиршество духа и драма идей.* – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 312 с.

Размеры (численные значения) величин, типичные для данной системы, будем называть *характерными масштабами* данной системы. Очевидно, что, процессы, протекающие в социальных, биологических системах, существенно более «медленные», чем процессы, в физических системах. Поэтому время, в течение которого протекает интересующий нас процесс, в физических системах существенно меньше, чем в системах социальных. Некоторые процессы в социальных системах могут иметь характерный временной масштаб, сопоставимый с временем человеческой жизни. Поэтому для исследования подобных процессов в социальных системах может потребоваться время, равное времени жизни нескольких поколений.

Итак, любая система может быть охарактеризована набором некоторых величин. Говоря об учебной аудитории, мы можем охарактеризовать ее следующими величинами: высота, длина, ширина, объем, вместимость (на сколько студентов рассчитана аудитория), уровень освещенности, степень тепло- и шумоизоляции и т.п. Каждая величина в той или иной мере характеризует учебную аудиторию и имеет свои единицы измерения. Для определенной цели какие-то величины важны, а какие-то – не очень. Для того чтобы охарактеризовать систему, используется определенный набор величин, причем, в зависимости от целей исследования, могут использоваться разные величины.

Все величины можно разделить на параметры и переменные. *Переменные* – это величины, которые могут изменяться при рассмотрении процесса, а *параметры* – это такие величины, которые в рамках рассматриваемой задачи могут считаться постоянными. При этом следует отметить, что такое деление в некоторой степени условно: в рамках одной задачи величины могут выступать как параметры, а в рамках другой задачи те же величины – как переменные.

Приведем несколько простых примеров: допустим, больной приходит к врачу и жалуется на свое здоровье. Биологическую систему «больной человек» можно охарактеризовать следующим набором

величин: возраст, рост, температура, давление. Конечно, есть и другие величины, которые для простоты исключим из рассмотрения. Все перечисленные величины в контексте данной задачи важны для описания состояния системы «больной человек»: по температуре и давлению врач может сделать предположение о характере заболевания, исходя из возраста больного, могут быть назначены те или иные медикаменты, причем дозировка лекарств может быть связана с весом больного. В данном наборе величин переменными выступают давление и температура, а параметрами – возраст, рост и вес. В рассматриваемой задаче «лечение больного» характерный временной масштаб – неделя. За эту неделю температура и давление больного могут существенно изменяться, а вот возраст, рост и вес в рамках данной задачи могут считаться неизменными.

Рассмотрим другую ситуацию: маленький ребенок растет, взрослеет и родители контролируют рост и вес малыша на протяжении нескольких лет его жизни. В данном случае за характерный временной масштаб, который составляет несколько лет, и вес, и рост, и возраст ребенка изменяются существенно. Таким образом, в данном контексте система «человек» характеризуется тем же набором величин, но теперь и возраст, и рост, и вес являются переменными.

Переменные величины, в свою очередь, подразделяются на независимые переменные и зависимые (функции). *Независимые переменные* – переменные, которые в рамках данной задачи изменяются независимо от рассматриваемой системы. Это, как правило, время и пространственные координаты. *Зависимые переменные*, в свою очередь, зависят от независимых и изменяются с изменением независимых величин. В рассмотренном выше примере «больной на приеме у врача» переменные величины «температура» и «давление» выступают как функции (зависимые переменные) от независимой переменной времени.

Обсудим еще и такие важные понятия, как **линейность** и **нелинейность**. Вот как пишет Ю. А. Данилов<sup>2</sup> о нелинейности<sup>3</sup>:

«Среди множества почетных титулов, которые принес нашему веку прогресс науки, “век нелинейности” – один из наименее звучных, но наиболее значимых и заслуженных. Нелинейность всепроникающа и вседеюща, многолика и неисчерпаемо разнообразна. Она повсюду: в большом и в малом, в явлениях быстротечных и длящихся эпохи. Нелинейность – это рождение и аннигиляция элементарных частиц. Гигантское пятно на Юпитере и оглушительный хлопок пастушьего кнута, биение сердца и всепроникающий луч лазера, теплый свет свечи и нескончаемая изменчивость волн, болезни и исцеление, вызов искусству аналитика и мастерству экспериментатора, надежды и бессилие создателей теорий и тех, кто подвергает их замыслы суровой экспериментальной проверке.

Нелинейность – понятие емкое, с множеством оттенков и градаций. Нелинейность эффекта или явления означает одно, нелинейность теории – другое.

Нелинейный эффект – это эффект, описываемый нелинейной зависимостью. Математически такого рода зависимости выражаются нелинейными функциями одного или нескольких переменных.

Мир линейных функций утомительно однообразен: стоит изучить лишь одну линейную функцию, как вы знаете все наиболее существенное о всех линейных функциях. Не приносит каких-либо неожиданностей и переход к большему числу измерений. Геометрический образ линейной функции, каков бы ни был ее физический смысл, в зависимости от числа независимых переменных – прямая, плоскость или гиперплоскость. На одинаковые приращения независимой переменной линейная функция беспристрастно (т.е. независимо от значения независимой переменной) откликается одинаковыми приращениями. Это означает, что линейная зависимость не обладает избирательностью. Она не может описывать ни резонансных всплесков, ни насыщения, ни колеба-

---

<sup>2</sup> Данилов Юлий Александрович (1936-2003) – русский физик, математик, историк науки, педагог, переводчик и просветитель.

<sup>3</sup> Данилов Ю. А. Нелинейность // Знание – сила. 1982. № 11. С. 34-36.

ний – ничего, кроме равномерного неуклонного роста или столь же равномерного и столь же неуклонного убывания.

Мир нелинейных функций так же, как и стоящий за ним мир нелинейных явлений, страшит, покоряет и неотразимо манит своим неисчерпаемым разнообразием. Здесь нет места чинному стандарту. Здесь безраздельно господствуют изменчивость и буйство форм. То, что точно схватывает и передает характерные особенности одного класса нелинейных функций, ничего не говорит даже о простейших особенностях типичного представителя другого класса. Геометрический образ нелинейной функции – кривая на плоскости, искривленная поверхность или гиперповерхность в пространстве трех или большего числа измерений. На одинаковые приращения независимой переменной одна и та же нелинейная функция откликается по-разному в зависимости от того, какому значению независимой переменной придается приращение. Почти полным безразличием к изменению одних и повышенной чувствительностью к изменению других значений независимой переменной нелинейные функции разительно контрастируют с линейными. Именно здесь и проходит демаркационная линия между миром нелинейных и линейных явлений».

Нелинейность проявляется повсюду. Например, искажение сигнала при прохождении его через среду тоже обусловлено нелинейными эффектами. Сигнал, проходящий через линейную среду, либо не изменяется совсем, либо усиливается, либо ослабляется, но не искажается. Нелинейность же вносит искажения в сигнал, в результате чего он может значительно измениться. В качестве забавного примера нелинейности в человеческом обществе может служить юмористический рассказ Аркадия Аверченко «Люди, близкие к населению», написанный им в начале XX века:

[http://ocr.krossw.ru/html/averch/averchenko-ludi\\_bliz-ls\\_1.htm](http://ocr.krossw.ru/html/averch/averchenko-ludi_bliz-ls_1.htm)

Предметом изучения (исследования) в рамках нашего курса будут не системы вообще, а так называемые «динамические системы» в математическом понимании этого термина.

Под **динамической системой** понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие *состояния* как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы, и его называют *законом эволюции*. Динамические системы – это механические, физические, химические и биологические объекты (процессы), вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами.

Описание динамических систем в смысле задания закона эволюции допускает большое разнообразие: оно осуществляется с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, с помощью теории графов, теории марковских цепей и т. д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид *математической модели* соответствующей динамической системы.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены величины, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции состояния во времени.

Среди динамических систем можно выделить два больших класса: динамические системы с непрерывным временем (потокковые модели) и динамические системы с дискретным временем (отображения).

## Литература

1. Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 224 с.
2. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. М.: КомКнига, 2006. – 208 с.
3. Безручко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. – М.: КомКнига, 2005. – 304 с.