Лекция 7
Распределенные системы

До сих пор рассматривались модели, в которых исследуемые величины зависят только от времени, при этом распределение величин в пространстве полностью игнорировалось. Такие модели называют **точечными** (или **сосредоточенными**, **локальными**). Например, при исследовании с помощью таких моделей динамики популяций не учитывался факт, что особи могут перемещаться в пространстве, образуя, например, скопления в некоторых местах. А при изучении динамики химических реакций не учитывалось, что взаимодействие и преобразование веществ происходят в некотором объеме, и концентрации реагентов в различных частях сосуда могут быть, вообще говоря, различными.

Модели, в которых переменные изменяются не только во времени, но и в пространстве, называют **распределенными**. При этом в качестве инструмента моделирования часто используют уравнения типа «реакция–диффузия», в которых для описания динамики (реакции) используются соответствующие правые части точечных моделей.

§1. Волна в логистической популяции

Рассмотрим динамику логистической популяции на бесконечном одномерном ареале $-\infty < x < +\infty$, описываемую уравнением

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + F(N), \tag{1}$$

где D – коэффициент диффузии (D – положительная постоянная), $F(N)$ – функция логистического роста популяции, удовлетворяющая следующим условиям[1]:

[1] Перечисленным условиям удовлетворяет, например, функция $F(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, которая описывает прирост популяции в модели Ферхюльста-Пирла.

1) $F(0) = F(K) = 0, \quad 0 < K < +\infty,$
2) $F'(0) = r > 0, \;\; F'(K) < 0,$
3) $F'(N) < F'(0) \;\; \forall\, N > 0.$

В (1) неизвестная функция $N(x,t)$ есть плотность популяции в точке x в момент времени t.

Можно показать, что *для уравнения (1) существует решение типа бегущей волны $N(x,t) = U(x+vt)$, распространяющейся влево со скоростью v, которое обладает свойствами решения логистического уравнения*[2]*, т. е.*

$$U(z) = 0 \quad \textit{при} \quad z \to -\infty \quad \textit{и} \quad U(z) = K \quad \textit{при} \quad z \to +\infty. \tag{2}$$

Переменную $z = x + vt$ называют волновой переменной. Подставляя решение вида $N(x,t) = U(z)$ в уравнение (1), получим

$$v\frac{dU}{dz} = D\frac{d^2U}{dz^2} + F(U) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2U}{dz^2} = \frac{v}{D}\frac{dU}{dz} - \frac{F(U)}{D}. \tag{3}$$

Обозначив

$$p = \frac{dU}{dz}, \quad \gamma = \frac{v}{D}, \quad \varphi(U) = \frac{F(U)}{D},$$

уравнение (3) сведем к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dz} = p, \\[2ex] \dfrac{dp}{dz} = \gamma p - \varphi(U). \end{cases} \tag{4}$$

Цель исследования – выяснить, при каких условиях система (4) имеет решение, удовлетворяющее условиям (2). Эти условия определяют (при любом конечном t) волну, перед фронтом которой (т. е. в тех местах ареала, куда волна еще не достигла) плотность популяции равна 0, а за фронтом уже установилось значение плотности, равное локальной емкости среды K. Поскольку условия (2) заданы при $z \to \pm\infty$, то искомая траектория должна идти из одной особой точки в другую.

[2]Примером логистического уравнения является уравнение Ферхюльста-Пирла $\dfrac{dU}{dt} = rU\left(1 - \dfrac{U}{K}\right)$.

Найдем особые точки системы (4). Так как $\varphi(0) = \varphi(K) = 0$, то решив систему уравнений:

$$\begin{cases} p = 0 \\ \gamma p - \varphi(U) = 0, \end{cases}$$

найдем две особые точки системы (4) $P_1 = (0, 0)$ и $P_2 = (K, 0)$. Выясним характер их устойчивости. В окрестности особой точки $P^* = (U^*, p^*)$ матрица линеаризованной системы имеет вид:

$$A(P^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varphi'(U^*) & \gamma \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Характеристическое уравнение для матрицы $A(P_1)$

$$\lambda^2 - \gamma\lambda + \varphi'(0) = 0$$

имеет вещественные положительные корни, если $\gamma \geqslant 2\sqrt{\varphi'(0)}$, и комплексные корни с положительной вещественной частью, если $\gamma < 2\sqrt{\varphi'(0)}$. Следовательно, особая точка $P_1 = (0, 0)$ является неустойчивым узлом, если $\gamma \geqslant 2\sqrt{\varphi'(0)}$, и неустойчивым фокусом, если $\gamma > 2\sqrt{\varphi'(0)}$.

Так как плотность $N(x, t) = U(z)$ не может быть отрицательной (а в случае, если точка P_1 – фокус, то траектория обязательно пройдет через область отрицательных U), то для существования искомого решения всегда должно быть выполнено условие

$$\gamma \geqslant 2\sqrt{\varphi'(0)}, \tag{6}$$

т. е. точка $P_1 = (0, 0)$ должна быть узлом. Тогда все траектории, лежащие в малой окрестности этой точки, будут обязательно проходить через нее.

Вывод 1. *Таким образом, условие (6) является необходимым для существования искомого решения в виде бегущей волны и оно равносильно следующему*

$$v \geqslant 2\sqrt{DF'(0)}. \tag{6'}$$

Так как $\varphi'(K) = \frac{F'(K)}{D} < 0$, то корни характеристического уравнения матрицы $A(P_2)$

$$\lambda^2 - \gamma\lambda + \varphi'(K) = 0$$

являются вещественными разного знака. И, следовательно, точка $P_2 = (K, 0)$ является седлом, через которое проходят только те траектории, которые лежат на двух сепаратрисах седла.

Уравнения сепаратрис в окрестности точки $(K; 0)$ можно записать в виде:

$$p_1 = k_1(U - K), \quad p_2 = k_2(U - K), \tag{7}$$

где коэффициенты $k_1 < 0$ и $k_2 > 0$ являются корнями уравнения

$$k^2 - \gamma k + \varphi'(K) = 0.$$

При этом фазовая точка по первой сепаратрисе при $t \to +\infty$ движется к точке покоя, а по второй – от точки покоя.

Проверьте это самостоятельно, рассмотрев для системы (4) соответствующую линеаризованную систему в окрестности точки $(K; 0)$ и построив уравнения сепаратрис, которые для линейной системы являются прямыми, проходящими через особую точку. Фазовый портрет в окрестности точки $(K; 0)$ показан на рис. 1.

Очевидно, что при $U < K$ имеем $p_1(U) > 0$, а $p_2(U) < 0$. На рис. 1 на фазовой плоскости (U, p) изображено схематично поле направлений системы (4) и поведение траекторий в окрестности особых точек. Поскольку при $p < 0$ производная $\frac{dp}{dU} = \gamma - \frac{\varphi(U)}{p} > 0$, то траектория p_2 никогда не сможет пройти через точку $(0; 0)$. Поэтому $p_2(U)$ можно не рассматривать.

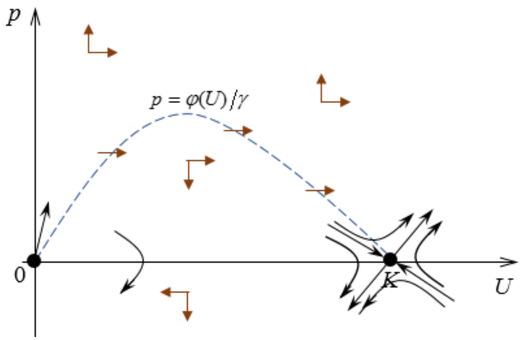

Рис. 1. Поле направлений и расположение траекторий в окрестности особых точек системы (4)

На рис. 1 видно, что траектория $p_1(U)$ не может пересечь ось U, и, следовательно, она вся лежит в первой четверти фазовой плоскости. Если докажем, что она не может пересечь ось p выше начала координат, то тем самым докажем, что она проходит через точку $P_1 = (0, 0)$.

Траектории системы (4) на фазовой плоскости являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dp}{dU} = \gamma - \frac{\varphi(U)}{p}. \tag{8}$$

Рассмотрим луч $\tilde{p}(U) = \beta U$. Покажем, что существует такой коэффициент $\beta > 0$, что луч не пересекает ни одна из траекторий, начинающихся на оси p выше начала координат. Тем самым мы покажем, что ни одна такая траектория не может входить в точку $P_2 = (K, 0)$.

Умножая обе части уравнения (8) на p и интегрируя полученное равенство по U, получим

$$p^2(U) = p^2(0) + 2\gamma \int\limits_0^U p(y)\,dy - 2\int\limits_0^U \varphi(y)\,dy. \tag{9}$$

Предположим, что существует точка на фазовой плоскости с абсциссой $\tilde{U} > 0$, в которой траектория $p(U)$ пересекает луч $\tilde{p}(U)$. Тогда будем иметь

$$\beta^2\tilde{U}^2 = p^2(0) + 2\gamma \int\limits_0^{\tilde{U}} p(y)\,dy - 2\int\limits_0^{\tilde{U}} \varphi(y)\,dy. \tag{10}$$

Так как для всех $U \in [0, \tilde{U})$ справедливо $p(U) > \tilde{p} = \beta U$, то

$$2\int\limits_0^{\tilde{U}} p(y)\,dy > \beta\tilde{U}^2,$$

и, следовательно,

$$\beta^2\tilde{U}^2 > p^2(0) + \gamma\beta\tilde{U}^2 - 2\int\limits_0^{\tilde{U}} \varphi(y)\,dy. \tag{11}$$

Из свойств функции $F(N)$ следует, что

$$F(U) < F'(0)U \quad \forall U > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(U) < \varphi'(0)U \quad \forall U > 0.$$

Тогда

$$\beta^2 \tilde{U}^2 > p^2(0) + \gamma\beta\tilde{U}^2 - \varphi'(0)\tilde{U}^2. \tag{12}$$

Если теперь мы выберем β такое, чтобы выполнялось соотношение

$$\beta^2 - \gamma\beta + \varphi'(0) = 0, \tag{13}$$

то из (12) следует, что $p^2(0) < 0$. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Нетрудно показать, что так как $\gamma \geqslant 2\sqrt{\varphi'(0)}$, то уравнение (13) имеет положительные корни, т. е. $\beta > 0$. Проверьте это самостоятельно.

Вывод 2. *Таким образом, доказано, что* $v \geqslant 2\sqrt{DF'(0)}$ *и существует единственная траектория, выходящая из точки* $(0; 0)$ *и входящая в точку* $(K; 0)$. *Соответствующее ей решение* $U(z) = U(x + vt)$ *удовлетворяет условиям (2) и описывает волну, распространяющуюся справа налево со скоростью* v.

Получили непрерывный спектр возможных скоростей, ограниченный снизу величиной $v_0 = 2\sqrt{DF'(0)}$. Возникает вопрос, какая из этих скоростей реализуется в действительности? В [1] доказано, что бегущая волна $N(x, t) = U(x + at)$, распространяется со скоростью v, которая при достаточно больших t стремиться к $v_0 = 2\sqrt{DF'(0)}$ снизу, а форма волны стремиться к функции $U^0(z)$, являющейся решением уравнения

$$\frac{d^2U^0}{dz^2} - \frac{v_0}{D}\frac{dU^0}{dz} + \frac{F(U^0)}{D} = 0,$$

с граничными условиями

$$U^0(-\infty) = 0, \quad U^0(+\infty) = K.$$

В [1] также доказано, что имеет место сходимость к этому решению для широкого класса «реальных» начальных распределений $N(x, 0)$, например, для таких

$$N(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ K, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$N(x,0) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ H(x), & x_1 \leqslant x < x_2 \\ K, & x \geqslant x_2, \end{cases}$$

где x_1, x_2 конечны, а функция $H(x)$ монотонна и непрерывна $(0 \leqslant H(x) \leqslant K,\ H'(x) \geqslant 0)$.

Замечание. «Псевдоволна» в логистической популяции

Пусть $D = 0$, т. е. имеется бесконечное число локальных ареалов, никак не связанных друг с другом. Тогда вместо (1) имеем уравнение

$$\frac{\partial N}{\partial t} = F(N), \tag{14}$$

или, переходя к волновой переменной $z = x + vt$,

$$v\frac{dU}{dz} = F(U), \tag{15}$$

где $U(x+vt) = N(x,t)$. Пусть $F(N) = rN\left((1 - \frac{N}{K}\right)$. Тогда, интегрируя (15) и полагая $U(0) = \frac{K}{2}$, получим

$$N(x,t) = \frac{K}{1 + exp\Big(-\frac{r(x+vt)}{v}\Big)}. \tag{16}$$

Решение уравнения (14) будет иметь вид «псевдоволны» лишь тогда, когда задано соответствующее начальное распределение

$$N(x,0) = \frac{K}{1 + exp(-rx/v)}.$$

Использование термина «псевдоволна» можно объяснить следующим образом. В каждом из локальных ареалов численность популяции возрастает согласно локальному закону роста, и этот процесс совершенно не зависит от соседних ареалов. Не существует никакого перетекания биомассы из одного ареала в другой – то, что обычно связывается с распространением волны. Но однако для внешнего наблюдателя создается полное впечатление распространения волны.

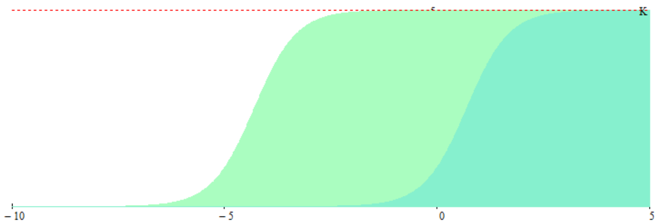

Рис. 2. Распространение «псевдоволны»

Список литературы

1. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и информатика. - М.: Наука, 1985. С. 221-246.
2. *Свирежев Ю. М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, 1987. 368 с.