Лекция 6
Дискретные динамические системы на прямой

Уравнение вида $x_{t+1} = F(x_t)$

1. Основные понятия

Часто встречаются ситуации, когда достаточно знать состояние системы в заданные дискретные моменты времени. Так, если физики более склонны рассматривать непрерывные о времени процессы, то биологи, наоборот, предпочитают рассматривать изменения из года в год, или от поколения к поколению[1]. В этом случае в качестве эволюционного оператора можно использовать функцию, выражающую состояние системы в некоторый момент времени через ее состояние в предыдущий момент времени. Моделью такой динамической системы может служить *автономное разностное уравнение*:

$$x_{t+1} = F(x_t), \quad t = 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

где x_t – переменная величина, характеризующая состояние системы в t-й момент дискретного времени, $f(x)$ – некоторая функция. Считается, что функция определена в области D (ограниченной или неограниченной, $D \subseteq R$) и имеет область значений в D.

Уравнение (1) еще называют *рекуррентным уравнением 1-го порядка* или *одномерным дискретным отображением.*

Часто исследование уравнения (1) связано с получением ответа на такие вопросы: как ведут себя с ростом времени отдельные решения уравнения и как они зависят от изменения начальных данных.

---

[1] Для многих биологических популяций рост численности последовательных поколений происходит в дискретные моменты времени. Длина шага может сильно варьироваться в зависимости от конкретного биологического вида. Есть популяции, в которых взрослые особи, оставляющие потомство в данном году, редко доживают или никогда не доживают до того, чтобы размножиться в будущем году. В основном, свойство неперекрывающихся поколений относится к различным видам насекомых, однолетних растений, многих рыб.

Определение 1. **Решением уравнения** *(1) называется числовая последовательность* $\{x_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots,$ *члены которой удовлетворяют уравнению (1).*

Последовательность, которая является решением уравнения (1), часто называют **траекторией** или **орбитой**, стартующей из точки x_0.

Решение уравнения (1) вида $x_t = x^* = const \quad \forall t = 0, 1, 2, \ldots$ называют *стационарным,* а точку x^* – *положением равновесия* (или *точкой покоя, стационарной точкой, неподвижной точкой*).

Очевидно, все положения равновесия находятся как корни уравнения

$$x = F(x). \tag{2}$$

Если x_t, рассматриваемая как функция дискретной переменной t, является неотрицательной, то имеют смысл только неотрицательные корни уравнения (2).

Решение уравнения (1) можно наглядно продемонстрировать с помощью диаграммы и лестницы Ламерея (рис. 1). Абсциссы точек пересечения биссектрисы первой четверти координатной плоскости (x, y) с графиком функции $F(x)$ определяют равновесные состояния (рис. 1а). На рис. 1б показан способ нахождения значений x_t в последовательные моменты времени. Пусть в начальный момент $t = 0$ имеем $x = x_0$, тогда $F(x_0) = x_1$ задает значение x в момент времени $t = 1$. С помощью биссектрисы найденное значение «переносится» на ось x. Величина x_1, в свою очередь, определяет значение $F(x_1) = x_2$, которое также отмечается на оси x с помощью биссектрисы. И так далее. На рис. 1б приведен пример, когда числовая последовательность (траектория) сходится к равновесному состоянию, совершая затухающие колебания.

2. Устойчивость положений равновесия

Определение 2. *Стационарное решение* $x_t = x^*,\ t = 0, 1, 2, \ldots,$ *уравнения (1) называется* **устойчивым по Ляпунову,** *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$, *такое, что*

$$|x_t - x^*| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0, \quad \text{\textit{если}} \quad |x_0 - x^*| < \delta. \tag{$\star$}$$

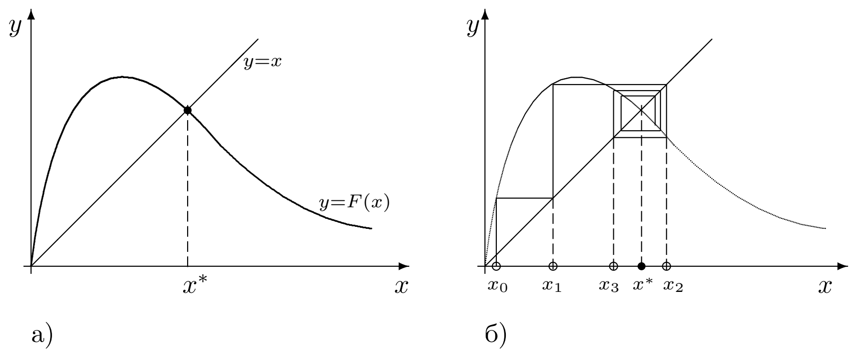

Рис. 1. Диаграммы Ламерея:
а) определение положений равновесия; б) определение значений x_t в последовательные моменты времени (лестница Ламерея)

Если же для некоторого $\varepsilon > 0$ такого δ не существует, то решение x^* называют **неустойчивым.**

Определение 3. *Стационарное решение* $x_t = x^*$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, *уравнения (1) называется* **асимптотически устойчивым**, *если оно устойчиво по Ляпунову и* $\lim\limits_{t\to+\infty} |x_t - x^*| = 0$, *когда* $|x_0 - x^*| < \delta$.

Так как разность $x_t - x^*$ характеризует отклонение точки x_t траектории от положения равновесия x^* в момент времени t, то определениям 2 и 3 можно дать следующую интерпретацию: малым отклонениям начальных данных соответствуют малые отклонения и в дальнейшем, а если при этом отклонения затухают с течением времени, то имеет место асимптотическая устойчивость. Для неустойчивости характерно нарастание отклонений.

В теории динамических систем асимптотически устойчивые положения равновесия (неподвижные точки) часто называют *аттракторами*[2] или *притягивающими точками*, а неустойчивые – *репеллерами* или *отталкивающими точками.*

[2] Множество точек в фазовом пространстве, к которому стремится изображающая точка с течением времени, называется *аттрактором.* С другой стороны, множество в фазовом пространстве, от которого изображающая точка «уходит» с течением времени, называется *репеллером.*

Разложив функцию $F(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x_t - x^* = \xi_t$ и отбросив члены порядка ξ_t^2, построим соответствующее линеаризованное уравнение

$$\xi_{t+1} = F'(x^*)\xi_t, \tag{3}$$

где ξ_t имеет смысл отклонения от положения равновесия в момент времени t. Анализируя поведение решения уравнения (3), в некоторых случаях можно сделать вывод об асимптотической устойчивости положения равновесия x^*.

Так как уравнение (3) определяет геометрическую прогрессию, то общий член ее стремиться к нулю при $t \to +\infty$, если знаменатель прогрессии, равный $F'(x^*)$, будет по модулю меньше 1. Следовательно, можно сформулировать следующие правила анализа положения равновесия на устойчивость.

Если $0 < |F'(x^*)| < 1$, то x^* – асимптотически устойчивое положение равновесия, причем если $0 < F'(x^*) < 1$, то отклонения монотонно затухают, если $-1 < F'(x^*) < 0$, то отклонения затухают, а траектория совершает затухающие колебания.

Если $|F'(x^*)| > 1$, то x^* – неустойчиво, причем имеет место монотонное нарастание отклонений, когда $F'(x^*) > 1$; если же $F'(x^*) < -1$, то траектория совершает колебания с нарастающей амплитудой.

Величину $\lambda = F'(x^*)$ называют *мультипликатором* неподвижной точки.

Сформулированные правила дают достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Если $|F'(x^*)| = 1$ или $F'(x^*) = 0$, то по поведению решения соответствующего линеаризованного уравнения нельзя сделать вывод об устойчивости положения равновесия и требуются дополнительные исследования. Точка x^* может быть аттрактором также и тогда, когда

$$|F'(x^*)| = 1.$$

В этом случае можно воспользоваться следующими теоремами [1].

Теорема 1. *Пусть x^* – положение равновесия уравнения (1), в котором $F\colon R \to R$, и $F'(x^*) = 1$. Если*

1) $F''(x^*) \neq 0$, то x^* неустойчиво (репеллер);

2) $F''(x^*) = 0$ и $F'''(x^*) > 0$, то x^* неустойчиво (репеллер);

3) $F''(x^*) = 0$ и $F'''(x^*) < 0$, то x^* асимптотически устойчиво (аттрактор).

Доказательство. 1) Так как $F''(x^*) \neq 0$, то в окрестности точки x^* график функции $F(x)$ имеет вид либо выпуклой кривой (если $F''(x^*) < 0$), либо вогнутой кривой (если $F''(x^*) > 0$) (рис. 1). Если $F''(x^*) < 0$, то $F'(x) > \alpha > 1$ для всех $x \in I_1 = (x^* - \varepsilon, x^*)$, $\varepsilon > 0$. Используя теорему о конечных приращениях, для $x \in I_1$ получим

$$|F(x) - x^*| = |F'(\xi)(x - x^*)| = F'(\xi)|x - x^*| > \alpha|x - x^*|, \quad \xi \in I_1.$$

Тогда, если $x_t \in I_1$ и $F(x_t) \in I_1$ для $t = 0, 1, ..., N$, будем иметь

$$|x_t - x^*| = |F(x_{t-1}) - x^*| = F'(\xi_1)|x_{t-1} - x^*| > \alpha|x_{t-1} - x^*| =$$

$$= \alpha|F(x_{t-2}) - x^*| = \alpha F'(\xi_2)|x_{t-2} - x^*| > \alpha^2|x_{t-2} - x^*| = ...$$

$$... = \alpha^{t-1}|x_1 - x^*| = \alpha^{t-1}|F(x_0) - x^*| = \alpha^{t-1}F'(\xi_t)|x_0 - x^*| > \alpha^t|x_0 - x^*|,$$

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t \in I_1.$$

Полученная оценка для $|x_t - x^*|$ позволяет сделать вывод о том, что при малых начальных отклонениях, т. е. когда $|x_0 - x^*| < \delta$, отклонения $x_t - x^*$ в последующие моменты времени увеличиваются, так как $\alpha > 1$. Таким образом, не выполняются условия ($\star$) определения 2 и поэтому точка x^* не устойчива.

Аналогично анализируется случай, когда $F''(x^*) > 0$, так как при этом $F'(x) > 1$ для всех $x \in I_2 = (x^*, x^* + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

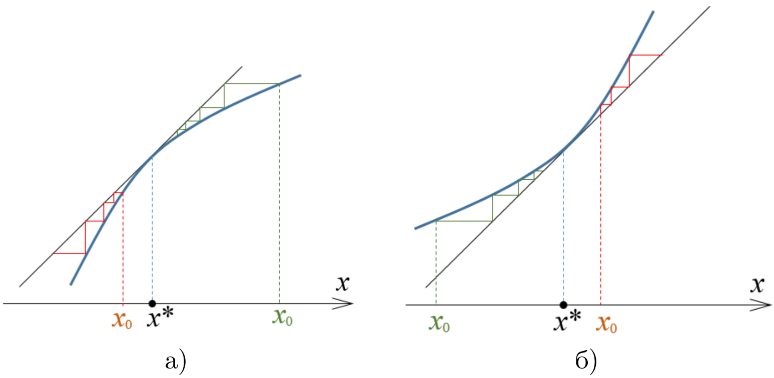

Рис. 1. Геометрическая иллюстрация неустойчивости положения равновесия в случае, когда $F'(x^*) = 1$ и:
а) $F''(x^*) < 0$; б) $F''(x^*) > 0$.

Надо заметить, что в рассматриваемом случае можно говорить о полуустойчивости положения равновесия. Так, если $F''(x^*) < 0$, точка покоя x^* притягивает те траектории, для которых $x_0 \in (x^*, x^*+\varepsilon)$. Если же $F''(x^*) > 0$, точка покоя x^* притягивает те траектории, для которых $x_0 \in (x^* - \varepsilon, x^*)$.

2) Если $F''(x^*) = 0$ и $F'''(x^*) \neq 0$, то в точке x^* график функции $F(x)$ имеет перегиб. При этом, так как $F'''(x) > 0$, то он имеет вид выпуклой кривой, если $x \in I_1 = (x^* - \varepsilon; x^*)$, и вогнутой кривой, если $x \in I_2 = (x^*; x^* + \varepsilon)$ (рис. 2б). В этом случае $F'(x) > 1$ для всех $x \in I_1 \cup I_2$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в первом пункте доказательства теоремы.

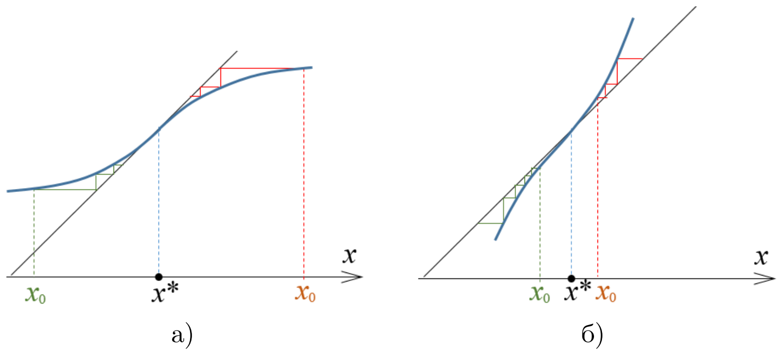

Рис. 1. Геометрическая иллюстрация анализа на устойчивость положения равновесия для случая, когда $F'(x^*) = 1$, $F''(x^*) = 0$ и: а) $F'''(x^*) < 0$; б) $F'''(x^*) > 0$.

3) В точке x^* график функции $F(x)$ имеет перегиб. При этом, так как $F'''(x) < 0$, то он имеет вид вогнутой кривой, если $x \in I_1 = (x^* - \varepsilon; x^*)$, и выпуклой кривой, если $x \in I_2 = (x^*; x^* + \varepsilon)$. Тогда $0 < F'(x) < \alpha < 1$ для всех $x \in I = I_1 \cup I_2$, и при этом нетрудно установить, что, если $x_t \in I$ и $F(x_t) \in I$ для $t = 0, 1, ..., N$ и $|x_0 - x^*| < \delta$, то

$$|x_t - x^*| < \alpha^t |x_0 - x^*| < \alpha^t \delta.$$

Таким образом, так как $0 < \alpha < 1$, то при малых начальных отклонениях отклонения в последующие моменты времени остаются малыми. А так как

$$\lim_{t \to +\infty} |x_t - x^*| = 0,$$

то точка x^* является притягивающей. $\square$

Обозначим через $S(x)$ следующее выражение

$$S(x) = -2F'''(x) - 3\left(F''(x)\right)^2. \tag{4}$$

Дифференциальное выражение (4) называют производной Шварца или шварцианом.

Теорема 2. *Пусть* x^* *– положение равновесия уравнения (1), и* $F'(x^*) = -1$. *Если*

1) $S(x^*) < 0$, *то* x^* *асимптотически устойчиво (аттрактор);*

2) $S(x^*) > 0$, *то* x^* *неустойчиво (репеллер).*

Доказательство. Заметим, что положение равновесия x^* уравнения (1) будет и положением равновесия уравнения

$$x_{t+2} = F(F(x_t)), \tag{5}$$

и при этом если оно будет аттрактором уравнения (5), то оно будет аттрактором и уравнения (1). Действительно, так как

$$(F(F(x)))' = F'(F(x)) \cdot F'(x),$$

то

$$(F(F(x)))'|_{x=x^*} = F'(F(x^*)) \cdot F'(x^*) = F'(x^*) \cdot F'(x^*) = (F'(x^*))^2,$$

и тогда

$$(F'(x^*))^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |F(x^*| < 1.$$

Поэтому, так как по условию теоремы $F'(x^*) = -1$, и при этом $(F(F(x)))'|_{x=x^*} = 1$, то для анализа на устойчивость точки x^*, рассматривая уравнение (5), можно применить теорему 1. Для этого найдем вторую производную:

$$(F(F(x)))'' = (F'(F(x)) \cdot F'(x))' =$$

$$= (F'(F(x)))' \cdot F'(x) + F'(F(x)) \cdot F''(x) =$$

$$= F''(F(x)) \cdot F'(x) \cdot F'(x) + F'(F(x)) \cdot F''(x) =$$

$$= F''(F(x)) \cdot (F'(x))^2 + F'(F(x)) \cdot F''(x).$$

Ясно, что

$$(F(F(x)))''|_{N=x^*} = F''(x^*) \cdot (F'(x^*))^2 + F'(x^*) \cdot F''(x^*) = 0,$$

поэтому надо рассмотреть еще и производную третьего порядка:

$$(F(F(x)))''' = (F''(F(x)) \cdot (F'(x))^2 + F'(F(x)) \cdot F''(x))' =$$

$$= F'''(F(x)) \cdot (F'(x))^3 + 2F''(F(x)) \cdot F'(x) \cdot F''(x) +$$

$$+ F''(F(x)) \cdot F'(x) \cdot F''(x) + F'(F(x)) \cdot F'''(x) =$$

$$= F'''(F(x)) \cdot (F'(x))^3 + 3F''(F(x)) \cdot F'(x) \cdot F''(x) + F'''(x) \cdot F'(F(x)).$$

При $N = x^*$ получим:

$$(F(F(x)))'''|_{N=x^*} = F'''(x^*) \cdot (F'(x^*))^3 +$$

$$+ 3F''(x^*) \cdot F'(x^*) \cdot F''(x^*) + F'''(x^*) \cdot F'(x^*) =$$

$$= -2F'''(x^*) - 3(F''(x^*))^2 = S(x^*).$$

Для завершения доказательства осталось применить результат теоремы 1 к выражению $S(x)$. □

Рассмотрим еще один особый случай, когда $F'(x^*) = 0$. В малой окрестности точки x^* динамика отклонений решения уравнения (1) от положения равновесия x^* может быть описана уравнением

$$\xi_{t+1} = \frac{1}{2} F''(x^*) \xi_t^2, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Обозначив через $\alpha = \frac{1}{2} F''(x^*)$, нетрудно установить, что

$$\xi_t = \left(\alpha \xi_0\right)^{2^t - 1} \cdot \xi_0.$$

Тогда в случае $\alpha \neq 0$, если $|\xi_0| < \delta < \frac{1}{|\alpha|}$, будем иметь $|\alpha| \cdot |\xi_0| = \beta < 1$ и

$$|\xi_t| = \beta^{2^t - 1} \cdot |\xi_0| < |\xi_0| < \delta \quad \forall t > 0.$$

При этом очевидно, что

$$\lim_{t \to +\infty} |\xi_t| = 0.$$

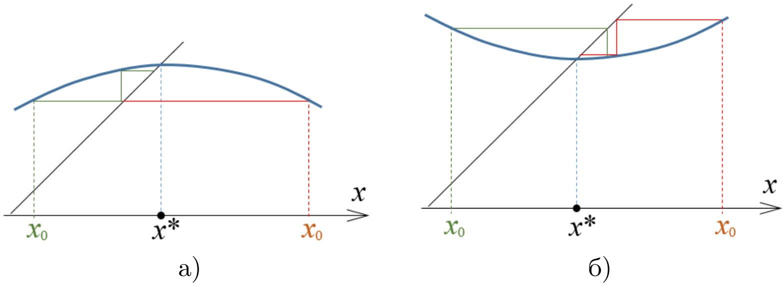

Рис. 3. Геометрическая иллюстрация устойчивости положения равновесия для случая, когда $F'(x^*) = 0$ и:
а) $F''(x^*) < 0$; б) $F''(x^*) > 0$.

И, следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть x^* – положение равновесия уравнения (1), в котором функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Если $F'(x^*) = 0$ и $F''(x^*) \neq 0$, то x^* асимптотически устойчиво.*

Если и $F''(x^*) = 0$, то в разложении правой части уравнения (1) по степеням $\xi_t = N_t - x^*$ следует отбрасывать члены уже порядка ξ_t^4 и выше.

Рассмотренные правила позволяют установить сходимость траекторий x_t к равновесию x^* лишь при малых начальных отклонениях, выясняя устойчивость в локальном смысле. Если имеет место сходимость траекторий x_t к равновесию x^* при любых начальных отклонениях, то положение равновесия является г*лобально асимптотически устойчивым.* Глобальный характер поведения тракторий может быть установлен, например, отысканием соответствующих функций Ляпунова [2]. Заметим, что, если система имеет несколько положений равновесия, то ни одно из них точно не обладает глобальной устойчивостью.

3. Существование и устойчивость периодических решений

При анализе уравнения (1) кроме исследования положений равновесия выясняют наличие и характер устойчивости периодических решений (циклов). Это позволит получить представление о том, какие виды аттракторов присущи системе.

Определение 4. *Решение $\{x_t^*\}|_{t=0,1,2...}$ уравнения (1), состоящее из конечного набора T ($T > 1$) различных значений, повторяющихся* *в строгой последовательности, т. е. когда:*

1) $x^*_t = x^*_{t+T},\ t = 0, 1, 2, \ldots,$

2) $x^*_{t+j} \neq x^*_t,\ j = 1, 2, \ldots, T-1,$

называют циклом длины T (или T-точечным циклом, или просто T-циклом).

Цикл длины T будем записывать следующим образом:

$$(x_1^{<T>}, x_2^{<T>}, \ldots, x_T^{<T>}).$$

Точки $x_i^{<T>},\ i = \overline{1, T}$, образующие цикл, являются решением следующей системы:

$$\begin{cases} x_2 = F(x_1), \\ x_3 = F(x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_T = F(x_{T-1}), \\ x_1 = F(x_T), \\ x_i \neq x_j,\ \forall i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, T. \end{cases} \tag{6}$$

Можно доказать, что если функция $F(x)$ является возрастающей, то уравнение (1) не имеет периодических решений. Действительно, предположим, что среди решений уравнения (1) есть цикл длины T. Пусть, для определенности,

$$x_1^{<T>} > x_2^{<T>}. \tag{7}$$

Так как $F(x)$ – возрастающая функция и $x_i^{<T>},\ i = 1, 2, ..., T,$ – точки цикла, удовлетворяющие условиям (6), то справедлива следующая цепочка равносильных неравенств (для упрощения записи символы ${}^{<T>}$, указывающие на длину цикла будем опускать):

$$x_1 > x_2 \ \Leftrightarrow\ F(x_1) > F(x_2) \ \overset{(6)}{\Leftrightarrow}\ x_2 > x_3 \ \Leftrightarrow\ F(x_2) > F(x_3) \ \Leftrightarrow$$

$$\overset{(6)}{\Leftrightarrow}\ x_3 > x_4 \ \Leftrightarrow\ F(x_3) > F(x_4) \Leftrightarrow ... \ \Leftrightarrow\ x_{T-1} > x_T \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ F(x_{T-1}) > F(x_T) \ \overset{(6)}{\Leftrightarrow}\ x_T > x_1.$$

Таким образом, получили

$$x_2 > x_3 > x_4 > \ ... \ > x_T > x_1,$$

откуда следует

$$x_2 > x_1,$$

что противоречит (7). Следовательно, предположение о наличии цикла в случае возрастания функции $F(x)$ неверно.

Так как для любого $k = 1, 2, \ldots$ справедлива следующая последовательность итераций:

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad x_{k+2} = F(x_{k+1}) = F(F(x_k)) = F^2(x_k),$$

$$x_{k+3} = F(x_{k+2}) = F(F^2(x_k)) = F^3(x_k), \ldots$$
$$\ldots, \; x_{k+T} = F(F^{T-1}(x_k)) = F^T(x_k),$$

то, учитывая условие цикла $x_{k+T} = x_k$, для x_k получим:

$$x_k = F^T(x_k).$$

Таким образом, любая точка цикла находится среди корней уравнения

$$x = \underbrace{F(F(\ldots F}_{T}(x)\ldots)) = F^T(x). \qquad (8)$$

Так как

$$F(x^*) = x^*, \quad F(F(x^*)) = F(x^*) = x^*,$$

$$F(F(F(x^*))) = F(F(x^*)) = F(x^*) = x^*, \ldots$$

$$\ldots, \underbrace{F(F(\ldots F}_{T}(x^*)\ldots)) = F^T(x^*) = x^*,$$

то и все положения равновесия уравнения (1) являются корнями уравнения (8). Кроме того, аналогично можно доказать, что, если p является делителем T, то положения равновесия уравнения

$$x_{t+p} = F^p(x_t)$$

являются положениями равновесия уравнения

$$x_{t+T} = F^T(x_t),$$

а, значит, и корнями уравнения (8).

Таким образом, для нахождения цикла длины T, решая уравнение (8), следует, прежде всего, найти для уравнения (1) все положения равновесия и циклы всех длин, являющихся делителями T.

Исключив указанные решения из множества корней уравнения (8), из оставшихся корней составляют цикл (циклы) длины T.

Вопрос о существовании циклов различной длины среди решений уравнения (1) впервые решен в работе украинского математика А. Н. Шарковского [4]. Для формулировки основного результата введем упорядочение натуральных чисел:

$$\begin{aligned}
&3 \succ 5 \succ 7 \succ ... \succ \\
&\succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ ... \succ \\
&\succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ ... \succ \\
&\succ 2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ ... \succ \\
&\succ ... \succ \\
&\succ ... \succ 2^5 \succ 2^4 \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
\end{aligned}$$

В верхней строке выписаны в порядке возрастания все нечетные числа, кроме 1, во второй строке – произведения нечетных чисел (кроме 1) на 2, в третьей – произведения нечетных чисел на 2^2, в k-й строке сверху – произведения нечетных чисел на 2^{k-1}. Наконец, в последней (нижней) строке представлены только степени двойки. Такое упорядочение натуральных чисел носит название **порядка Шарковского**. Каждое натуральное число в этом порядке появляется только один раз.

Теорема 4 (А. Н. Шарковский, [4]). *Пусть $F\colon R \to R$ – непрерывная функция и пусть уравнение (1) имеет цикл длины k. Тогда уравнение (1) имеет цикл длины m для всех таких m, что $k \succ m$ в указанном выше порядке.*

Из этой теоремы следует, что если уравнение (1) не имеет циклов длины 2, то оно вообще не имеет никаких циклов. А если уравнение (1) имеет цикл длины 3, то оно имеет цикл любой длины. Но в теореме Шарковского ничего не говорится об устойчивости циклов.

Выясним, когда в случае существования, цикл является притягивающим (аттрактором). В силу определения цикла, каждая из точек $x_i^{<T>}$, $i = 1, 2, ..., T$, является неподвижной точкой T-ой итерации отображения

$$F^T(x) = \underbrace{F(F(...F}_{T}(x)...)),$$

а значит, и положением равновесия уравнения

$$x_{t+T} = F^T(x_t). \tag{9}$$

Действительно, для точки $x_1^{<T>} = x_1$, учитывая только условия (6), имеем

$$x_1 = F(x_T) = F^2(x_{T-1}) = F^3(x_{T-2}) = ... = F^T(x_{T-(T-1)}) = F^T(x_1).$$

Аналогично проводится доказательство и для остальных точек цикла. И поэтому вопрос об устойчивости цикла сводится к вопросу об устойчивости положений равновесия уравнения (9), которые являются точками цикла. А так как уравнение (9) является разностным уравнением первого порядка, когда t изменяется с шагом, равным T, то для исследования на устойчивость надо определить мультипликатор неподвижной точки x_k уравнения (9):

$$\lambda_k^{<T>} = \big(F^T(x)\big)'\big|_{x_k}.$$

Докажем, что его значение не зависит от точки цикла. По правилу дифференцирования сложной функции для мультипликатора точки цикла x_1 будем иметь:

$$\lambda_1^{<T>} = F'(F^{T-1}(x_1))\big(F^{T-1}(x_1)\big)' = F'(x_T)\big(F^{T-1}(x_1)\big)' = ...$$

$$... = F'(x_T)F'(x_{T-1})F'(x_{T-2}) \cdot ... \cdot F'(x_2)F'(x_1).$$

Для любой другой точки цикла выражение для мультипликатора совпадает с полученным выражением с точностью до порядка сомножителей и равен

$$\lambda^{<T>} = \prod_{j=1}^{T} F'(x_j) \quad \forall k = 1, 2, ..., T. \tag{10}$$

Величину $\lambda^{<T>}$ назвают *мультипликатором* цикла. Он показывает, как изменяются малые возмущения за период цикла.

В зависимости от значения мультипликатора цикла вводится следующая терминология. Цикл $(x_1^{<T>}, x_2^{<T>}, \ldots, x_T^{<T>})$ называют *притягивающим, отталкивающим* или *нейтральным,* если соответственно:

$$\left|\lambda^{<T>}\right| < 1;$$

$$\left|\lambda^{<T>}\right| > 1;$$

$$\left|\lambda^{<T>}\right| = 1.$$

Наряду с равновесием и циклами можно выделить еще один тип поведения решения разностного уравнения (1). Это так называемые *хаотические* траектории, т. е. непериодические последовательности $\{x_t\}$, $t = 0, 1, \ldots$, и даже, более того, не стремящиеся ни к какому притягивающему равновесию или циклу. Существует связь между наличием цикла периода 3 и существованием хаотических решений. Ее установили американские математики Т. Ли и Дж. Йорк. Свой результат они опубликовали в 1975 г. в работе, озаглавленной «Период три рождает хаос» [3]. Независимо от А. Н. Шарковского, Т. Ли и Дж. Йорк доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Если уравнение (1) обладает трехточечным циклом, то оно имеет также и решения любого периода и, кроме того, существует несчетное множество начальных значений x_0, при которых решение не стремится ни к одному из этих циклов, т. е. хаотично* [2, 3].

Литература

1. Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 360 с.

2. Свирежев Ю. М. Устойчивость биологических сообществ / Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет. М.: Наука, 1978.

3. Шапиро А. П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии / А. П. Шапиро, С. П. Луппов М.: Наука, 1983. 133 с.

4. Шарковский А. Н. Существование циклов непрерывного преобразования в себя / А. Н. Шарковский Украинский математический журнал, 16(1), 1964, С. 61–65.

[3]Li T. Y. and Yorke J. A. Period three implies chaos. American Mathematical Monthly, **82**, 1975, 187–204.