Лекция 5
Хаотическое поведение динамических систем. Система Лоренца

Разнообразие поведения траекторий на плоскости ограничено теоремой Бендиксона-Пуанкаре, согласно которой траектория может уйти на бесконечность, «уткнуться» в особую точку или «намотаться» на предельный цикл. Не случайно выдающийся специалист по теории колебаний А. А. Андронов в поисках новых типов поведения траекторий провозгласил лозунг: «Выйти из плоскости!». Первым по-настоящему выйти из плоскости удалось американскому метеорологу-теоретику Эдварду Лоренцу (1917-2008).

Система Лоренца – динамическая система была исследована Э. Лоренцем в 1963 г. Она создавалась с целью построить упрощенную модель атмосферной конвекции для решения вопроса о том, возможен ли долгосрочный прогноз погоды. Фактически до работы Лоренца ненадежность прогноза погоды объясняли главным образом отсутствием достаточно мощной ЭВМ. Считалось, что в детерминированной системе всегда можно предвидеть состояние системы (например, дать надежный прогноз погоды), несмотря на малые погрешности измерения начального состояния системы, которые всегда существуют на практике.

Э. Лоренц, занимаясь моделированием атмосферных потоков в Массачусетском институте, сделал открытие, которое выразил метафорой в названии одной из статей – «Предсказуемость: может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?» (1972).

Рассматривая тепловую конвекцию в подогреваемом снизу слое вязкой жидкости, Лоренц предложил систему из трех уравнений[1]:

$$\begin{cases} x'(t) = -\sigma x + \sigma y, \\ y'(t) = rx - y - xz, \\ z'(t) = xy - bz. \end{cases} \tag{1}$$

Он написал компьютерную программу для ее решения. Согласно описанию численного эксперимента, принадлежащего самому Лоренцу, он вычислял значения решения в течение длительного времени, а затем остановил счет. Его заинтересовала некоторая особенность решения, которая возникла где-то в середине интервала счета, и поэтому он повторил вычисления с этого момента. Результаты повторного счета, очевидно, совпали бы с результатами первоначального счета, если бы начальные значения для повторного счета в точности были равны полученным ранее значениям для этого момента времени. Однако Лоренц слегка изменил эти значения, уменьшив число верных десятичных знаков. Ошибки, введенные таким образом, были крайне невелики. Но самое неожиданное было впереди. Вновь сосчитанное решение некоторое время хорошо согласовывалось со старым. Однако, по мере счета расхождение возрастало, и постепенно стало ясно, что новое решение вовсе не напоминает старое. Лоренц вновь повторял и повторял вычисления (вероятно, не доверяя компьютеру), прежде, чем осознал важность эксперимента. То, что он наблюдал, теперь называется *существенной зависимостью от начальных данных* – основной чертой, присущей хаотической динамике. Существенную зависимость иногда называют *эффектом бабочки*. Такое название относится к невозможности делать долгосрочные прогнозы погоды[2].

1. Основы физики тепловой конвекции в жидкости

Пусть слой жидкости[3] толщиной H, ограниченный двумя горизонтальными поверхностями, располагается в гравитационном поле. На

[1] Конвективные течения описываются системой нелинейных уравнений, включающей уравнения количества движения (Навье-Стокса), теплопроводности и неразрывности. После ряда упрощений Лоренцом получена система уравнений для описания состояния системы в фазовом пространств с координатами, соответствующими скоростям и температурам. См. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 240 с.

[2] Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Техносфера, 2006. С.155-156.

[3] Под жидкостью будем понимать и газообразную, и жидкую среду.

верхней поверхности поддерживается температура T_0, а на нижней – $T_0+\Delta T$ $\Delta T > 0$ (рис. 1). Таким образом, в слое существует постоянный градиент температуры, что иллюстрируется графиком на рис. 1.

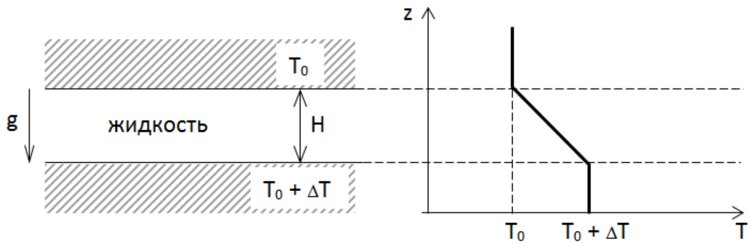


Рис. 1. Схема опыта Рэлея–Бенара

В жидкости с определенным коэффициентом теплового расширения разность температур порождает разность плотностей. Холодная, более плотная, жидкость, которая располагается в верхней части слоя, стремится опуститься, в то время как нижняя часть слоя, более теплая и менее плотная, стремится подняться. Возникающее при этом движение жидкости называют *тепловой конвекцией*. Однако, если разность температур ΔT достаточно мала, то конвективное движение не возникает из-за стабилизирующих эффектов трения. При достижении определенной разности температур ΔT_c состояние покоя жидкости теряет устойчивость и начинается конвекция. Конвективное движение жидкости впервые отчетливо наблюдалось в экспериментах (1901 г.) французского исследователя Бенара и получило теоретическое объяснение в работах (1916 г.) английского физика Дж. Рэлея (1842-1919). Именно поэтому такое явление называют конвекцией Рэлея-Бенара. При значениях $\Delta T > \Delta T_c$ в результате конвекции формируется структура валов (*конвективные валы*) с параллельными горизонтальными осями (рис. 2), которые образованы чередующимися восходящими и нисходящими потоками (рассматриваем ситуацию, когда движение жидкости однородно вдоль оси Oy декартовой системы координат). Потоки расположены эквидистантно с пространственным периодом L. Два соседних вала вращаются в противоположные стороны.

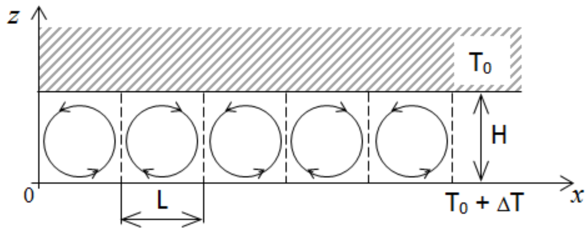


Рис. 2. Схема движения жидкости в конвективных валах

При значениях $\Delta T < \Delta T_c$ конвективные валы имеют стационарную структуру, т. е. скорость и температура описываются функциями, не зависящими от времени. При дальнейшем увеличении разности ΔT структура становится более сложной, но сохраняет определенную регулярность. Однако при еще большем увеличении разности ΔT структура полностью разрушается и на смену упорядоченной стационарной структуре приходит непрерывно изменяющаяся неупорядоченная конфигурация: движение жидкости становится турбулентным.

2. Переменные и параметры системы Лоренца

Систему уравнений (1) называют *моделью Лоренца* (или *системой Лоренца*). Переменные, входящие в систему, являются безразмерными и имеют следующий физический смысл:

1) x характеризует скорость вращения конвекционных валов;

2) y определяет разность температур ΔT между входящими и нисходящими потоками;

3) z характеризует отклонение вертикального температурного профиля от линейной зависимости.

Три параметра σ, r и b пропорциональны соответственно числу Прандтля, числу Рэлея и некоторому коэффициенту, отражающему геометрию области (геометрический параметр конвективной ячейки)[4].

Параметр r пропорционален разности температур между дном подогреваемой снизу жидкости и ее свободной поверхностью. Его называют управляющим, поскольку он «управляет» переводом системы из одного состояния в другое (изменение параметра соответствует большему или меньшему нагреву жидкости).

[4]Подробно о параметрах модели см., например, [2] с. 194.

3. Свойства системы Лоренца

1. Однородность. Правые части уравнений системы (1) не содержат свободных членов.

2. Симметрия. Вид уравнений системы (1) не изменится, если одновременно заменить знак переменных x и y. Это значит, что любое образование в фазовом пространстве либо обладает той же симметрией, т. е. превращается само в себя при замене переменных $x \to -x$, $y \to -y$, либо имеет подобное образование в качестве «симметричного партнера».

3. Диссипатвность. Вычислим дивергенцию фазового потока (1):

$$\operatorname{div}(x', y', z') = \frac{\partial}{\partial x}(-\sigma x + \sigma y) + \frac{\partial}{\partial y}(rx - y - x) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - bz) =$$

$$= -\sigma - 1 - b < 0.$$

Таким образом, поток сжимает некоторый объем фазового пространства $V(t)$ согласно соотношению:

$$V(t) = V(0)\exp\big(-(\sigma + 1 + b)t\big).$$

Следовательно, модель Лоренца диссипативна, и все траектории будут ограничены некоторым предельным множеством.

4. Неподвижные точки системы Лоренца

Найдем положения равновесия, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0, \\ rx - xz - y = 0, \\ xy - bz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x(r - 1 - z) = 0, \\ x^2 = bz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ z = r - 1, \end{array}\right. \\ x^2 = bz. \end{cases}$$

Система Лоренца при любых значениях параметров имеет нулевое положение равновесия $P_1 = (0, 0, 0)$, а при $r > 1$ еще два ненулевых положения равновесия:

$$P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r - 1),$$

$$P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Заметим, что при $r \to 1$ все три положения равновесия сливаются в одно нулевое P_1. Очевидно, значение параметра $r = 1$ является бифуркационным.

5. Устойчивость положений равновесия

Для исследования на устойчивость построим матрицу линеаризованной системы в окрестности произвольного положения равновесия $P^* = (x^*, y^*, z^*)$:

$$A(P^*) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z^* & -1 & -x^* \\ y^* & x & -b \end{pmatrix}.$$

1) Для положения равновесия $P_1 = (0, 0, 0)$ будем иметь

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Построим характеристическое уравнение для матрицы A

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0. \qquad (2)$$

Так как $D = (\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r) = (\sigma-1)^2 + 4\sigma r > 0$, то уравнение (2) имеет три вещественных корня (один из них $\lambda_1 = -b < 0$), которые будут отрицательными, если $r < 1$. Если $r > 1$, то один из корней уравнения (*) будет положительным, а при $r = 1$ существует корень, равный 0.

Вывод. *Положение равновесия P_1 является асимптотически устойчивым (тип – узел), если $r < 1$, неустойчивым (тип – седло), если $r > 1$. При $r = 1$ точка P_1 является негиперболической.*

Физическая интерпретация. *При малых значениях параметра r передача тепла осуществляется с помощью теплопроводности, а жидкость неподвижна. При $r = 1$ состояние $P_1 = (0, 0, 0)$ находится на «грани устойчивости»: теплопроводность уступает место конвекции. При $r > 1$ в жидкости возникаю конвективные валы.*

2) Для точки P_2 матрица

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & x^* \\ x^* & x^* & -b \end{pmatrix}, \quad x^* = \sqrt{b(r-1)}, \quad r > 1,$$

имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0. \tag{3}$$

Положение равновесия P_2 будет асимптотически устойчивым, если многочлен в левой части уравнения (3) будет устойчивым. Так как при $r > 1$ все коэффициенты многочлена положительны, то необходимое условие устойчивости многочлена[5] выполнено. Для выяснения, будет ли многочлен устойчивым, можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица. Для этого надо построить соответствующую матрицу Гурвица:

$$G = \begin{pmatrix} \sigma + b + 1 & 1 & 0 \\ 2\sigma b(r-1) & b(\sigma + r) & \sigma + b + 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma b(r-1) \end{pmatrix}$$

и найти ее главные миноры:

$$\Delta_1 = \sigma + b + 1, \Delta_2 = \sigma(\sigma + b + 3) + r(b + 1 - \sigma), \Delta_3 = 2\sigma b(r-1)\Delta_2.$$

По критерию Рауса-Гурвица, учитывая, что $r > 1$, получаем условия асимптотической устойчивости положения равновесия P_2:

$$(\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(\sigma + b + 3) + r(b + 1 - \sigma) > 0. \tag{4}$$

Граница устойчивости определяется уравнением:

$$\sigma(\sigma + b + 3) + r(b + 1 - \sigma) = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} r = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma - b - 1}, \\ \sigma - b - 1 > 0. \end{cases} \tag{5}$$

[5] Постников М. М. Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981. 176 с.

Можно показать, что условие (4) равносильно следующим:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma - b - 1 \leqslant 0, \\ \left\{\begin{array}{l} \sigma - b - 1 > 0, \\ r < \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{6}$$

Положение равновесия P_2 будет не устойчивым, если

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma - b - 1 > 0, \\ r > \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1} \end{array}\right. . \tag{7}$$

Характеристическое уравнение матрицы $A(P_3)$ совпадает с (3).

Поэтому относительно устойчивости положений равновесия P_2 и P_3 можно сделать следующий вывод.

Вывод. *Положения равновесия P_1 и P_2 являются устойчивыми или неустойчивыми одновременно. При этом асимптотическая устойчивость имеет место, если выполнены условия (6).*

Можно показать, что на границе устойчивости (5) характеристическое уравнение (3) принимает вид

$$(\lambda + \sigma + b + 1)\left(\lambda^2 + \frac{2\sigma b(\sigma+1)}{\sigma - b - 1}\right) = 0,$$

и, следовательно, имеет пару чисто мнимых корней. Это соответствует бифуркации Андронова-Хопфа.

6. Численные эксперименты с моделью Лоренца

Рассмотрим, как изменяется динамика системы Лоренца в случае, когда

$$\sigma = 10, \quad b = \tfrac{8}{3},$$

а параметр r, соответствующий степени подогрева, увеличивается, начиная с 0.

Если $0 < r < 1$, то точка $P_1 = (0, 0, 0)$ – единственное положение равновесия, которое является устойчивым узлом и притягивает к себе все траектории в фазовом пространстве. На рис. 3 показана зависимость $x(t)$ при $r = 0,5$ и начальном состоянии системы $(x(0), y(0), z(0) = (0.1; 1; 1)$. Начальное движение в жидкости затухает, т. е. конвекция отсутствует, и перенос тепла происходит за счет теплопроводности. На рис. 4 показана соответствующая фазовая траектория.

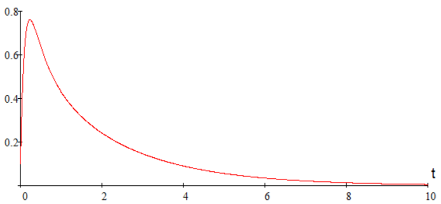


Рис. 3. График функции $x(t)$ при $r = 0,5$

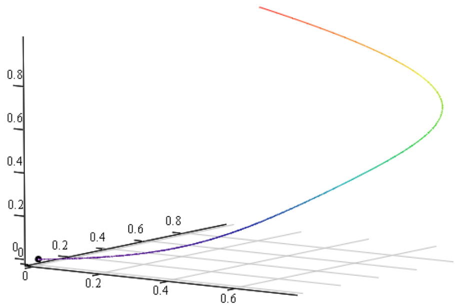
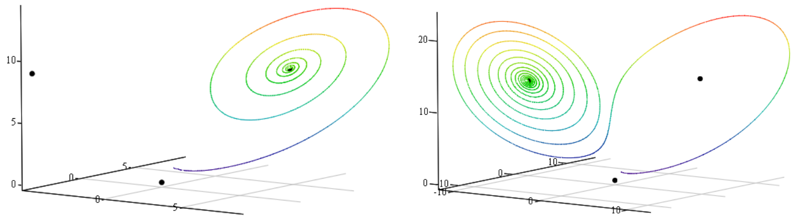


Рис. 4. Фазовая траектория при $r = 0,5$

При прохождении параметра r через значение $r = 1$ имеет место бифуркация типа «вилка». Когда $r > 1$, особая точка P_1 теряет устойчивость и рождается пара устойчивых положений равновесия P_2 и P_3, отвечающих стационарной конвекции в виде валов с противоположным направлением вращения. При этом скорость движения жидкости возрастает с увеличением r.

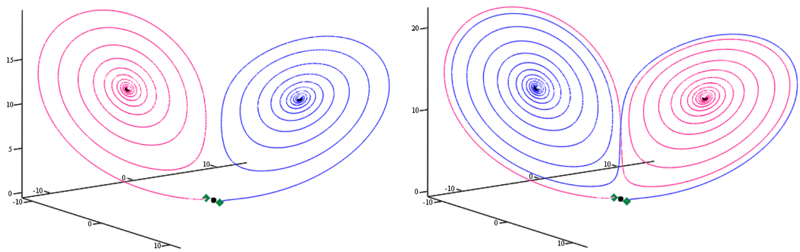
Если $1 < r < 1,345$, положения равновесия P_2 и P_3 являются устойчивыми узлами, а если $1,345 < r < 24,737$ – устойчивыми фокусами. С ростом параметра r (что соответствует увеличению разницы температуры) увеличивается и начальный размах колебаний относительно положения равновесия. Однако начиная со значения $r \approx 13,927$ в фазовом пространстве происходит перестройка – смена аттрактора. На рис. 5 приведены фазовые траектории при $r = 10$ и $r = 15$.



а) *б)*

Рис. 5. Фазовые траектории при $r = 10$ (а) и $r = 15$ (б)

На рис. 6 приведены фазовые траектории, соответствующие различным начальным условиям, иллюстрирующие смену аттрактора.



а) *б)*

Рис. 6. Фазовые траектории при $r = 13$ (а) и $r = 14$ (б)

С ростом r происходит уменьшение начального размаха колебаний, что иллюстрирует рис. 7 в сравнении с рис. 5-6.

Следующая перестройка происходит при $r \approx 24,06$ (рис. 8). С этого момента наряду с устойчивыми состояниями P_2 и P_3 возникает притягивающее множество сложной структуры, которое отвечает хаотическому режиму колебаний (*странный аттрактор Лоренца*). Особые точки P_2 и P_3 остаются устойчивыми до достижения значения $r* \approx 24,74$. Заметим, что значение $r*$ определяется выражением

$$r* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

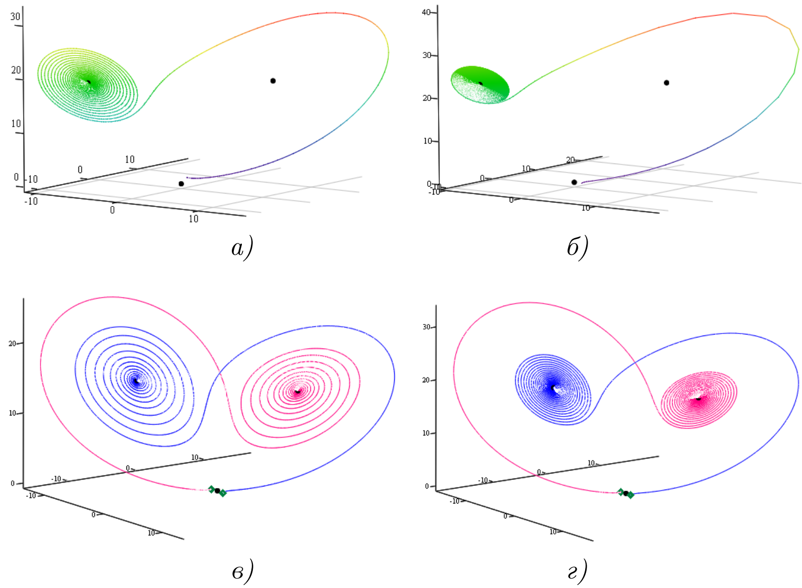


Рис. 7. Фазовые траектории при $r = 20$ (а), $r = 24$ (б), $r = 19$ (в), $r = 24$ (г)

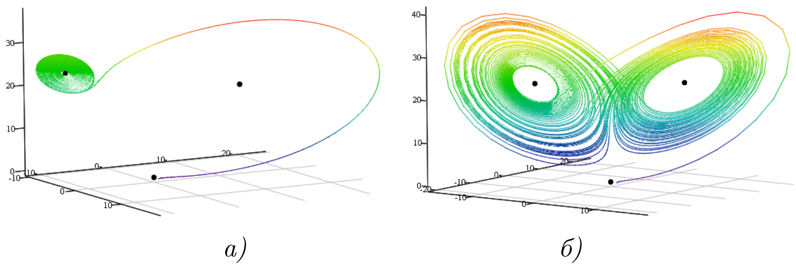


Рис. 8. Фазовые траектории при $r = 24,05$ (а), $r = 24,06$ (б)

Таким образом, в интервале r от $24,06$ до $24,74$ в системе существуют три аттрактора – две неподвижные точки P_2 и P_3 и странный аттрактор. Начиная с $r = r*$ неподвижные точки P_2 и P_3 теряют устойчивость, и остается единственное притягивающее множество – странный аттрактор Лоренца.

Характер поведения системы при значениях $r > r*$ коренным образом изменяется: движение становится крайне непредсказуемым. Траектория системы раскручиваясь по спирали в окрестности одной из неподвижных точек (P_2 и P_3) в течение произвольного отрезка времени, перепрыгивает в окрестность второй неподвижной точки и таким же образом некоторое время раскручивается по спирали, а затем перепрыгивает назад и так далее. Такое поведение иллюстрируют рис. 9 и 10.

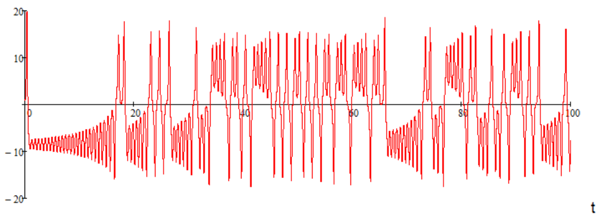


Рис. 9. График функции $x(t)$ при $r = 28$

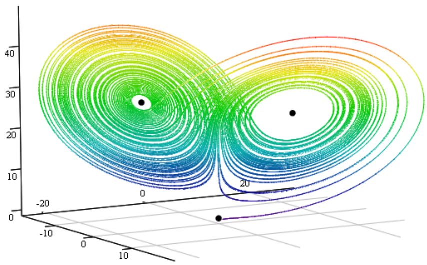
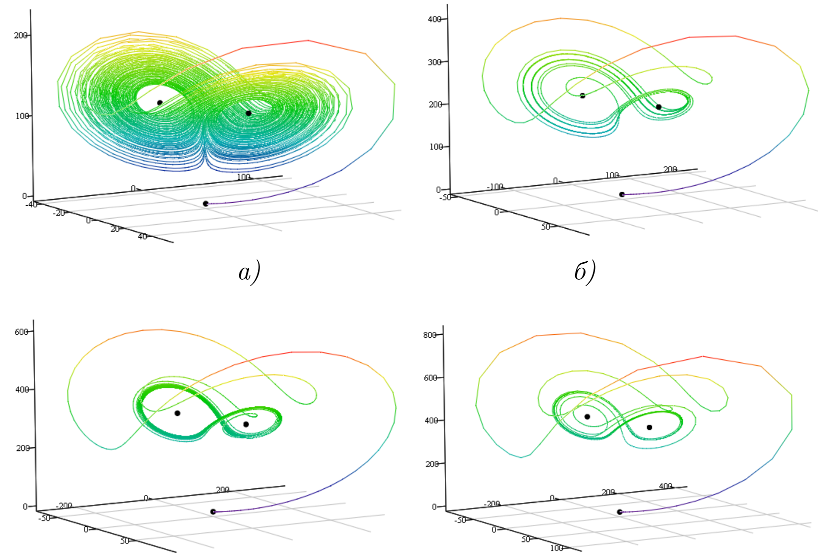


Рис. 10. Фазовая траектория при $r = 28$

Оставаясь в ограниченной области фазового пространства, траектория ясно очерчивает определенную структуру – фигуру, форма которой напоминает два крыла бабочки. Проходя вполне предсказуемую петлю в поле одного из крыльев, система совершает переход от одного крыла к другому всегда неожиданно и непредсказуемо.

При больших значениях параметра траектория претерпевает серьезные изменения (см. рис. 11). При больших r система переходит в режим автоколебаний, появляется чередование хаотического и периодического поведения.



а) *б)*

в) *г)*

Рис. 11. Фазовые траектории при $r = 120$ (а), $r = 220$ (б), $r = 320$ (в), $r = 420$ (в)

Провести численные эксперименты с системой Лоренца.

Список литературы

1. *Данилов Ю. А.* Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. – М.: КомКнига, 2006. 208 с.
2. *Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А.* Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 264 с.
3. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
4. *Деменюк С. Л.* Просто хаос. – СПб.: ООО «Страта», 2013. 232 с.